

Лекція № 1

Тема: Фізичні величини та їх вимірювання

Мета: ввести поняття основних і похідних одиниць фізичних величин; пояснити суть вимірювання; навчити розрізняти види похибок вимірювань; обробляти результати прямих і непрямих вимірювань.

Обладнання: таблиці, вимірювальні прилади.

Хід заняття.

I. Організаційний момент.

- а) готовність групи до заняття;
- б) психоемоційний настрій;
- в) перевірка присутніх.

II. Актуалізація опорних знань студентів.

Дайте відповіді на запитання:

- Чому фізику відносять до точних наук?
- Назвіть відомі вам фізичні величини та вкажіть їх одиниці вимірювання.

III. Виклад нового матеріалу.

План

1. Фізичні величини.
2. Основні і похідні одиниці фізичних величин.
3. Міжнародна система одиниць СІ. Основні одиниці в системі СІ.
4. . Вимірювання фізичних величин. Прямі і непрямі вимірювання.
5. Абсолютна і відносна похибки вимірювань.
6. Види похибок: систематичні та випадкові похибки, промахи.
7. Обробка результатів прямих вимірювань.
8. Похибки непрямих вимірювань.

IV. Узагальнення та систематизація знань.

Виведіть формулу для знаходження відносної похибки об'єму твердого циліндричного тіла $V = h \pi D^2 / 4$.

V. Підведення підсумків заняття.

VI. Домашнє завдання: вивчити матеріал лекції; за підручником «Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф. опрацювати матеріал на с. 4 - 11

Самостійне вивчення: опрацювати матеріал теми «Основні положення молекулярно-кінетичної теорії (МКТ)» за підручником «Загальний курс фізики», т.1, за ред. Кучерука І.М. ;§13.1; 13.3 §14.4-14.5; або за підручником «Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф. - §35-39.

Лекція №1

Тема: фізичні величини та їх вимірювання.

Мета : ознайомити учнів з поняттям «похибка вимірювань». Ознайомити учнів з математичним апаратом у курсі фізики

План

Вивчення нового матеріалу		1. Похибки вимірювань. Абсолютна та відносна похибки вимірювання. 2. Як визначають абсолютну та відносну похибки непрямих вимірювань. 3. Як правильно записати результат вимірювання. 4. Скалярні й векторні величини. 5. Наближені обчислення. 6. Графіки функцій та правила їх побудови
Закріплення вивченого матеріалу		Розв'язування задач

ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

1. Похибки вимірювань. Абсолютна та відносна похибки вимірювання

Під час вимірювання будь-якої фізичної величини зазвичай виконують три послідовні операції:

- 1) вибір, перевірка й встановлення приладів;
- 2) фіксування показань приладів;
- 3) обчислення шуканої величини за результатами вимірювань, оцінка похибки.

У 1954 році X Генеральна конференція з мір та ваги визначила шість основних одиниць ФВ, які повинні охоплювати всі галузі науки і техніки, бути основними для утворення похідних

одиниць, забезпечувати зручність для практичних вимірювань і відтворюватися за допомогою установок та еталонів з найбільшою точністю.

У наступні роки Генеральна конференція прийняла ряд доповнень і змін, у результаті чого в системі налічувалося сім основних одиниць (у 1971 році XIV Генеральна конференція з мір та ваги затвердила цьому основну одиницю кількості речовини - моль), похідні та позасистемні одиниці ФВ, а також розробила такі визначення основних одиниць:

- одиниця довжини - метр - довжина шляху, яку проходить світло у вакуумі за $1/299792458$ долю секунди;
- одиниця маси - кілограм - маса, що дорівнює масі міжнародного прототипу кілограма;
- одиниця часу - секунда - тривалість 9 192 631 770 періодів випромінювання, яке відповідає переходу між двома надтонкими рівнями структури основного стану атома цезію-133 за відсутності збурення з боку зовнішніх полів;
- одиниця сили електричного струму - ампер - сила струму незмінної величини, яка при проходженні по двох паралельних нескінченних провідниках і мізерно малого кругового перерізу, що знаходяться на відстані 1 м один від одного у вакуумі, створював би між цими провідниками силу, що дорівнює $2 \cdot 10^{-7}$ Н на кожний метр довжини;
- одиниця термодинамічної температури - кельвін - $1/273,16$ (до 1967 р. одиниця мала назву «градус Кельвіна») частина термодинамічної температури потрійної точки води. Допускається також застосування шкали Цельсія;
- одиниця кількості речовини - моль - кількість речовини системи, яка містить стільки ж структурних елементів, скільки атомів міститься в нукліді вуглецю-12 масою 0,012 кг;
- одиниця сили світла - кандела - сила світла в заданому напрямку джерела, яке випромінює монохроматичне випромінювання частотою $540 \cdot 10^{12}$ Гц, енергетична сила якого в цьому напрямку складає $1/683$ Вт/ср².

Наведені визначення досить складні і вимагають достатнього рівня знань, перш за все, у фізиці. Але вони дають уявлення про природне походження прийнятих одиниць, а тлумачення їх ускладнювалося у міру розвитку науки і завдяки новим високим досягненням теоретичної та практичної фізики, механіки, математики й інших фундаментальних галузей знань. Це дало можливість, з одного боку, представити основні одиниці як достовірні і точні, а з іншого - які можна пояснити і які зрозумілі для всіх країн світу, що є головною умовою для того, щоб система одиниць стала міжнародною.

Міжнародна система 8І вважається найбільш досконалою і універсальною порівняно з попередніми системами. Крім основних одиниць, у системі 8І є позасистемні (додаткові) одиниці для вимірювання плоского і тілесного кутів - радіан і стерadian відповідно, а також велика кількість похідних одиниць простору і часу, механічних величин, електричних і магнітних величин, теплових, світлових та акустичних величин, а також іонізуючих випромінювань.

Після прийняття Міжнародної системи одиниць практично всі найкрупніші міжнародні організації включили її в свої рекомендації з метрології і закликали всіх країн - членів цих організацій - прийняти її. У нашій країні система SI офіційно була прийнята шляхом уведення в 1963 р. відповідного державного стандарту.

Основні одиниці системи SI зі скороченими позначеннями українськими та латинськими літерами наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Основні одиниці системи SI

Величина	Одиниця вимірювання	Скорочене позначення одиниці	
		Українське	Міжнародне
Довжина	метр	м	m
Маса	кілограм	кг	kg
Час	секунда	с	s
Сила електричного струму	ампер	А	A
Термодинамічна температура	кельвін	К	K
Сила світла	кандела	кд	cd
Кількість речовини	моль	моль	mol

Позасистемні одиниці

Поряд з основними та похідними одиницями Міжнародної системи SI існують ще позасистемні одиниці (табл. 2.2), які не входили до складу жодної із систем - так звані позасистемні одиниці. Значного поширення набули одиниці тиску: атмосфера, бар, міліметр ртутного стовпа, міліметр водяного стовпа. Позасистемними одиницями є хвилина, година; одиницями довжини - ангстрем, світловий рік, парсек; одиницями площі - ар, гектар; одиницями електричної енергії - електрон-вольт, кіловат-година; одиницями акустичних величин - децибел, фон, октава та ін.

Таблиця 2.2

Позасистемні одиниці, які допущені до застосування на рівні з одиницями системи SI

Назва величини	Одиниця			Співвідношення з одиницями СІ	Примітка
	Назва	Позначення			
		Українське	Міжнародне		
1	2	3	4	5	6
Час*	хвилина	хв	min	1 хв = 60 с	Недопустиме використання з префіксами
	година	год	h	1 год = 3600 с	
	доба	д	d	1 д = 24 год	
Маса	тонна	т	t	1 т = 1000 кг	Значення атомної одиниці маси визначено експериментально
	центнер	ц	z	1 ц = 100 кг	
	уніфікована атомна одиниця маси	а.о.м.	u	1 а.о.м. = $1,66054 \cdot 10^{-27}$	
Об'єм, місткість	літр	л	l	1 л = 1 дм ³ = 10 ⁻³ м ³	Літр є спеціальною назвою кубічного дециметра
Енергія	електрон-вольт	eB	eV	1 eB = 1,602177 × 10 ⁻¹⁹ Дж	Значення електрон-вольта визначено експериментально
Площинний кут	градус	...°	...°	1° = (π/180) рад	
	хвилина	...'	...'	1' = (1/60°) = (π/10800) рад	
	секунда	..."	..."	1" = (1/60') = (π/648000) рад	

* Припустимо, що існує також застосування одиниць часу: тиждень, місяць, рік тощо, проте їх в уточнення.

* Не рекомендується застосовувати при точних вимірюваннях.

Однак при уніфікації одиниць й ухваленні єдиної системи одиниць кількість позасистемних одиниць повинна бути скорочена до мінімуму. До того ж багато позасистемних одиниць є кратними системі СІ і можуть використовуватися для практичних вимірювань (тонна, міліметр, мікрон та ін.) Вони широко застосовуються в повсякденному житті. Крім названих, існують ще позасистемні одиниці тимчасового використання (морська миля, яка дорівнює 1852 м; кабельтов - 182,5 м; гектар - 10 000 м²; ар - 100 м², бар - 10⁵ Па, карат - 0,2 г; бушель - 36,3687 дм³ та ін.), а також відносні та логарифмічні величини.

Кратні і часткові одиниці

Найпрогресивнішим способом утворення кратних і часткових одиниць у метричній системі мір є десяткова кратність між великими і малими одиницям. Десяткові кратні і часткові одиниці від одиниць СІ утворюються шляхом використання множників і приставок від 10²⁴ до 10⁻²⁴ (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Множники та приставки для утворення кратних і часткових

ОДИНИЦЬ

Множник	Прийставка		
	Назва	Позначення	
		Українське	Міжнародне
1	2	3	4
$1000000000000000000000000000 = 10^{24}$	йотта	Й	Y
$100000000000000000000000000 = 10^{21}$	зетта	З	Z
$10000000000000000000000000 = 10^{18}$	екса	Е	E
$1000000000000000000000000 = 10^{15}$	пета	п	P
$100000000000000000000000 = 10^{12}$	тера	Т	T
$10000000000000000000000 = 10^9$	гіга	Г	G
$1000000000000000000000 = 10^6$	мега	М	M
$1000 = 10^3$	кіло	к	k
$100 = 10^2$	гекто	г	h
$10 = 10^1$	дека	да	da
$0,1 = 10^{-1}$	деци	д	d
$0,01 = 10^{-2}$	санти	с	c
$0,001 = 10^{-3}$	мілі	м	m
$0,000001 = 10^{-6}$	мікро	мк	μ
$0,000000001 = 10^{-9}$	нано	н	n
$0,000000000001 = 10^{-12}$	піко	п	p
$0,000000000000001 = 10^{-15}$	фемто	ф	f
$0,00000000000000001 = 10^{-18}$	атто	а	a
$0,0000000000000000001 = 10^{-21}$	зепто	зп	z
$0,000000000000000000001 = 10^{-24}$	йокто	й	y

• Сучасну фізику створювало багато поколінь учених. Це були найрізноманітніші люди: заможні й бідні, високопоставлені й простолюдини. Комусь із них відкриття принесли славу й визнання ще за життя, а хтось так і пішов із життя, не побачивши, як майбутні покоління використовують їхні праці й відкриття. Дехто до кінця життя вірив, що відкриті ним закони принесуть користь людям, а хтось був гірко розчарований. Однак усіх їх єднали та єднають із сучасними вченими інтерес, жага знань, надзвичайне терпіння та працьовитість.

• Фізичне дослідження — це цілеспрямоване вивчення того чи іншого явища способами фізики.

• Експеримент — це дослідження фізичного явища в умовах, які знаходяться під контролем ученого, з метою поглибленого вивчення цього явища.

• Фізична величина — це кількісна характеристика об'єкта чи явища у фізиці або результат вимірювання.

• Виміряти яку-небудь величину — це означає порівняти її з однорідною величиною, прийнятою за одиницю.

• Пристрої, за допомогою яких вимірюють фізичні величини, називають вимірювальними приладами. Вимірювання розділяють на прямі та непрямі.

Значення будь-якої фізичної величини, що одержується в результаті замірювання, визначається лише наближено. Під час її вимірювання тим самим приладом в однакових умовах ми будемо отримувати серію різних значень. Цей набір значень розташовується в певному числовому інтервалі (A_1, A_2). Розкид значень усередині такого інтервалу називають похибкою вимірювань.

Ø Похибка вимірювання — оцінка відхилення величини вимірюваного значення величини від її справжнього значення. Похибка вимірювання є мірою точності вимірювання.

Помилки у вимірюванні фізичних величин поділяють на два класи: випадкові похибки й систематичні похибки.

Випадкові похибки зобов'язані своїм походженням ряду причин, дія яких неоднакова в кожному досліді й може бути не врахована. Випадкова похибка — похибка, що змінюється (за величиною та за знаком) від вимірювання до вимірювання. Випадкові похибки можуть бути пов'язані:

- з недосконалістю приладів (тертя в механічних приладах і т. п.);
- тряскою в міських умовах;
- з недосконалістю об'єкта вимірювання (наприклад, під час вимірювання діаметра тонкого дроту, який може мати не зовсім круглий перетин у результаті недосконалості процесу виготовлення);
- з особливостями самої вимірюваної величини.

Припустимо, що використовуючи ту ж саму апаратуру і той самий метод вимірювання, визначили N вимірювань величини x і отримали N значення, де величина x_1 - результат першого вимірювання, x_2 — другого, x_N — N -го виміру.

Щоб проаналізувати результати, необхідно відповісти на два запитання:

- Як знайти найбільш імовірне значення вимірюваної величини?
- Як визначити випадкову похибку через вимірювання? Відповідь на ці запитання можна знайти в теорії ймовірностей.

Найбільш вірогідне значення вимірюваної величини ($x_{\text{вим}}$) дорівнює середньому арифметичному значень, отриманих у результаті вимірів: випадкова похибка — середня помилка, отримана в результаті всіх вимірювань, обчислюється за формулою:

$$x_{\text{вим}} = x_{\text{ср}} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}.$$

Ø Систематична похибка — похибка, що змінюється в часі, підпорядковуючись певному закону.

Систематичні похибки можуть бути пов'язані з помилками приладів (неправильна шкала, калібрування і т. п.), які не враховувалися експериментатором.

Щоб правильно оцінити точність експерименту, необхідно врахувати як систематичну похибку, яка є результатом роботи приладу, так і випадкову похибку, зумовлену помилками вимірювань. Цю сумарну похибку називають абсолютною похибкою вимірювання.

Сама по собі абсолютна похибка не розкриває якість вимірювання. Тому є сенс говорити про відносну похибку.

Відносна похибка характеризує якість вимірювання й дорівнює відношенню абсолютної похибки до середнього значення вимірюваної величини. Відносну похибку іноді називають точністю. Найчастіше відносну похибку визначають у відсотках.

2. Як визначають абсолютну та відносну похибки непрямих вимірювань

Багато фізичних величин неможливо виміряти безпосередньо, їх непряме вимірювання має два етапи. Спочатку вимірюють величини x , y , z , які можна виміряти методом прямих вимірювань, а потім, використовуючи значення вимірювань x , y , z обчислюють шукану величину f . Нижче в таблиці виведено формули обчислення відносної похибки для деяких функцій.

Вид формули	$f = x + y$	$f = x - y$	$f = xy$
Відносна похибка	$\varepsilon_f = \frac{\Delta x + \Delta y}{x + y}$	$\varepsilon_f = \frac{\Delta x + \Delta y}{x - y}$	$\varepsilon_f = \varepsilon_x + \varepsilon_y$
Вид формули	$f = x/y$	$f = xn$	$f = \sqrt[n]{x}$
Відносна похибка	$\varepsilon_f = \varepsilon_x + \varepsilon_y$	$\varepsilon_f = n\varepsilon_x$	$\varepsilon_f = \frac{1}{n}\varepsilon_x$

Абсолютну похибку (Δf) можна знайти, скориставшись визначенням відносної похибки (εf). Використовуючи визначення $\varepsilon_f = \frac{\Delta f}{f_{вим}}$, отримуємо $\Delta f = \varepsilon_f \cdot f_{вим}$.

3. Як правильно записати результат вимірювання

Абсолютна похибка експерименту визначає точність, з якою можна проводити обчислення величини, що вимірюється. Якщо помилка округлення більша за абсолютну похибку —

округлення зменшує фактично досягнуту точність вимірювання; а якщо помилка округлення менша за абсолютну похибку — останні цифри запису результату будуть недостовірними. Тому округлювати результати вимірів та обчислень треба так, щоб остання значуща цифра була в тому ж десятковому розряді, що й абсолютна похибка вимірювання величини, що знаходилася.

У шкільних лабораторних роботах можна обмежуватися двома значущими цифрами. Остаточний результат для значення величини записують у вигляді: $x = x_{\text{вим}} \pm \Delta x$, де $x_{\text{вим}}$ — виміряне (середнє) значення.

4. Скалярні та векторні величини

Якщо деяка величина цілком визначається її числовими значеннями, то її називають скалярною. Прикладами скалярних величин можуть служити: маса, густина, робота, сила струму, температура.

Скалярні величини є алгебраїчними величинами, які можуть застосовуватися під час будь-яких алгебраїчних дій: додавання, віднімання, множення, ділення, знаходження ступеня і т. ін.

Якщо під час визначення певної величини для її повної характеристики, крім числового значення, треба знати й її напрям, то така величина називається векторною, або вектором.

Прикладами векторних величин є швидкість, прискорення, сила. Довжина вектора називається також його модулем або абсолютною величиною. Вектор позначається графічно відрізком прямої, на який ставиться стрілка, що вказує на напрям вектора.

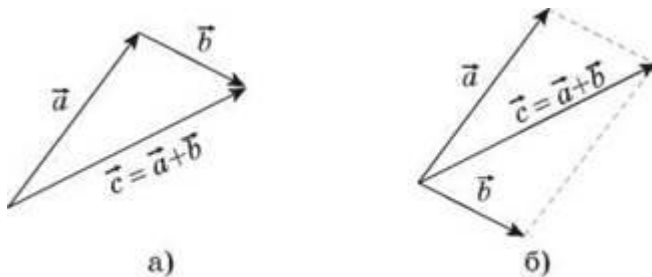


Будемо позначати вектор однією буквою зі стрілкою над нею, наприклад швидкість $\vec{v}$. Модуль вектора швидкості позначають так: v . Вектор дорівнює нулю, якщо його модуль дорівнює нулю. Такий вектор називається нульовим. Два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаються рівними, якщо:

- 1) рівні їх модулі,
- 2) вони паралельні і
- 3) спрямовані в один бік.

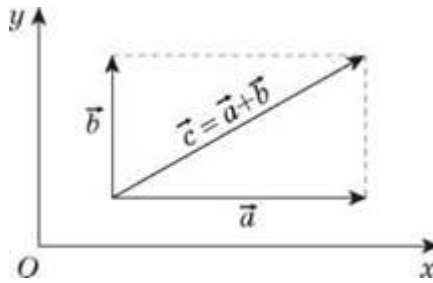
Два вектори з рівними модулями, що лежать на паралельних прямих, але протилежно спрямовані, називаються протилежними. Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначається через $-\vec{a}$.

Дії з векторними величинами виконуємо за правилами дій з векторами. Наприклад, складання векторних величин проводиться або за правилом трикутника (рис. а), або за правилом паралелограма (рис. б).



Розв'язування багатьох задач, у яких використовуються векторні величини, значно спрощується, завдяки тому, що будь-яку векторну величину можна задати за допомогою декількох чисел, які зветься проекціями цієї векторної величини на осі координат. Якщо вектор напрямлений вздовж якої-небудь однієї з координатних осей — його проекція на цю вісь дорівнює модулю цього вектора, взятому зі знаком «+», якщо вектор напрямлений у позитивному напрямі координатної осі, і модулю вектора зі знаком «-», якщо вектор напрямлений у негативному напрямі осі. Проекції ж такого вектора на решту координатної осі дорівнюють нулю. На рисунку як приклад зображені вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, напрямлені вздовж осі x . Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь x позитивна, тому $a_x = a$, а проекція вектора $\vec{b}$ — негативна, тому $b_x = -b$.

Якщо напрям вектора не збігається з напрямом якої-небудь з координатних осей, його можна подати у вигляді суми векторів, кожен з яких напрямлений уздовж однієї з координатних осей. Таке уявлення називається розкладанням вектора на складові. У такому випадку проекції вектора — це проекції його складових. На рисунку показано розкладання вектора на складові, одна з яких напрямлена вздовж осі x , а інша — уздовж осі y .



Проекції вектора c такі: $c_x = a_x$; $c_y = b_y$.

5. Наближені обчислення

Виконуючи обчислення, завжди необхідно пам'ятати про ту точність, яку потрібно або яку можна отримати. Неприпустимо вести обчислення з великою точністю, якщо дані завдання не допускають або не вимагають цього. Якщо наближене число містить зайві (або невірні) знаки, то його слід округлити. Під час округлення зберігаються тільки правильні знаки; зайві знаки відкидаються. Причому якщо остання цифра більша або дорівнює 5, то попередня цифра збільшується на одиницю, а якщо остання цифра менша 5, то попередня цифра не змінюється. При округленні виникає додаткова похибка, що не перевищує половини одиниці розряду останньої значущої цифри округленого числа. Тому, щоб після округлення всі знаки були правильними, похибка до округлення повинна бути не більшою за половину одиниці того розряду, до якого робитиметься округлення.

6. Графіки функцій та правила їх побудови

Розглянемо побудову графіків двох простих функцій: лінійної функції $y = y_0 + kx$ і квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Прикладом функцій такого виду може служити залежність переміщення від часу під час рівномірного руху (лінійна функція) і під час рівноприскореного руху (квадратична функція). Загальний метод побудови графіків будь-якої функції наступний: для функції, графік якої потрібно побудувати, складають таблицю. В одному рядку цієї таблиці записують значення аргументу (x), а в іншій — обчислені для цього аргументу значення функції. Потім будують осі координат: вісь x — вісь абсцис, і вісь y — вісь ординат. Після цього відкладають точки з парою координат (x_i, y_i) з таблиці і через отримані точки проводять плавну криву.

Графіком лінійної функції є пряма лінія. Для його побудови досить знайти положення двох точок і через ці точки провести пряму лінію. Графіком квадратичної функції є парабола, для побудови якої необхідно: знайти точки перетину графіка з осями координат; знайти вершину параболи; побудувати вісь симетрії.

ЗАКРІПЛЕННЯ ВИВЧЕНОГО МАТЕРІАЛУ

1. Які послідовні операції виконують, вимірюючи будь-яку величину?
2. Що таке прямі вимірювання? Наведіть приклади.
3. Що таке непрямі вимірювання? Наведіть приклади.
4. З якою метою необхідно оцінювати точність вимірів?
5. Наведіть приклади випадкових похибок; систематичних похибок.
6. Наведіть приклади абсолютної та відносної похибок.
7. Для чого необхідно робити оцінку абсолютної похибки?
8. Які величини називаються скалярними? Наведіть приклади скалярних величин у фізиці.
9. Які величини називаються векторними? Наведіть приклади векторних величин у фізиці.
10. Що таке проекція векторної величини на вісь координат? Який знак може мати ця проекція?

Задачі для розв'язування на уроці

1. Тіло перемістилося з певної точки з координатами $x_0 = 2$ м, $y_0 = 3$ м у точку з координатами $x = 4$ м і $y = 1$ м. Знайдіть модуль вектора та його проекції на осі координат.
2. Тіло перемістилося з певної точки з координатами $x_1 = 0$, $y_1 = 2$ м у точку з координатами $x_2 = 4$ м і $y_2 = -1$ м. Знайдіть модуль вектора та його проекції на осі координат.

Що ми дізналися на уроці

- Похибка вимірювання — оцінка відхилення величини виміряного значення величини від її справжнього значення. Випадкові похибки зобов'язані своїм походженням ряду причин, дія яких неоднакова в кожному досліді й не може бути врахована. Найбільш вірогідне значення вимірюваної величини (хвм) дорівнює середньому арифметичному значень, отриманих у результаті вимірів.

- Випадкова похибка ($\Delta x_{\text{вм}}$) — середня помилка, отримана в результаті всіх вимірювань,— обчислюється за формулою:

$$\Delta x_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{(x_1 - x_{\text{ср}})^2 + (x_2 - x_{\text{ср}})^2 + \dots + (x_N - x_{\text{ср}})^2}{N}}.$$

- Відносна похибка характеризує якість вимірювання й дорівнює відношенню абсолютної похибки (Δx) до середнього значення вимірюваної величини ($x_{\text{вим}}$):

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{\text{вим}}}.$$

- Абсолютна похибка — це модуль відхилення виміряного значення фізичної величини від її справжнього значення:

$$\Delta f = \varepsilon_f \cdot f_{\text{вим}}.$$

VI. Домашнє завдання: за підручником «Загальний курс фізики», за ред. Дмитрієва В.Ф. опрацювати матеріал на с.4 – 11, підготовка до лаб.роб.№1 «Визначення об'єму тіл правильної геометричної форми»

Лекція № 2

1.1.1 Предмет і завдання механіки. Система відліку. Переміщення тіла. Приклад опису прямолінійного руху. Швидкість і прискорення. Криволінійний рух, тангенціальне і нормальне прискорення. Рух точки по колу, кутова швидкість і кутове прискорення. Зміщення, швидкість і прискорення у гармонічному коливальному русі.

1. Предмет і завдання механіки

Механіка вивчає найпростішу форму руху матерії - **механічний рух**, тобто зміни взаємних положень тіл або їхніх частин. Звичайно під **механікою**, яку тепер називають **класичною**, розуміють вчення про рухи макроскопічних тіл, швидкості яких малі порівняно зі швидкістю світла. В її основі лежать закони механіки Ньютона. Рухи тіл, швидкості яких близькі до швидкості світла, описуються в теорії відносності; рухи мікрочастинок вивчаються у квантовій механіці.

Механіка поділяється на кінематику і динаміку. У **кінематиці** вивчаються переміщення тіл залежно від часу без урахування їхньої маси і сил, що діють на тіла; у **динаміці** - рухи тіл під дією прикладених до них сил; сюди відносять також **статiku** - вчення про умови рівноваги тіл.

Механічні рухи різних тіл та їхніх частин бувають дуже різноманітними.

Для опису руху тіла користуються аналітичним і графічним методами. При цьому абстрагуються від тіла до матеріальної точки або системи матеріальних точок. Положення матеріальної точки у просторі визначається як положення геометричної точки, а це істотно спрощує розв'язування задач із механіки.

Під **матеріальною точкою** розуміють реальний об'єкт нескінченно малих розмірів, що має масу. Практично тіло можна розглядати як матеріальну точку тоді, коли його розміри дуже малі порівняно з відстанню переміщення тіла у просторі. Наприклад, Землю та інші планети,

що обертаються навколо Сонця, можна розглядати як матеріальні точки, оскільки їхні розміри у десятки тисяч разів менші від радіусів орбіт. Тіло можна вважати матеріальною точкою, коли описуємо його поступальний рух, оскільки він цілком визначається рухом центра маси тіла. Нарешті, розмірами тіла можна знехтувати тоді, коли рух довільної точки на тілі одночасно визначає рух усього тіла. Так, увечері рух світної фари визначає рух автомобіля.

У задачах, де треба враховувати розміри тіла, його уявно поділяють на систему матеріальних точок. За рухом окремих точок тіла знаходять закономірності руху тіла в цілому. Отже, щоб вивчити рух будь-якого реального тіла, треба спочатку розглянути основні характеристики руху матеріальної точки.

2. Система відліку. Переміщення тіла

У природі всі тіла перебувають у русі. Щоб описати рух будь-якого тіла, треба вказати на інше тіло або групу тіл, які умовно вважатимуться нерухомими і відносно яких розглядатиметься рух заданого тіла. Іншими словами, щоб описати рух матеріальної точки, треба вибрати певне тіло відліку.

Залежно від вибору тіла відліку рух того самого тіла матиме різний вигляд. Наприклад, якщо за тіло відліку взято автобус, то пасажир, який сидить у ньому, вважатиметься нерухомим; якщо тілом відліку є поверхня Землі, то пасажир переміщуватиметься з такою самою швидкістю, як і автобус. Отже, всякий рух тіла відносний, так само як і стан спокою тіла.

Коли говорять про певний рух тіла, то мають на увазі вже певне тіло відліку, хоч іноді за очевидністю його не називають.

Тіло відліку та пов'язану з ним систему координат і сукупність синхронізованих годинників у різних точках простору в цілому називають **системою відліку**.

Рух матеріальної точки буде визначено, якщо в системі відліку будуть знайдені координати точки як функції часу:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \quad (1)$$

За цими функціями для будь-якого моменту часу можна обчислити координати точки і знайти її положення.

Лінія, яку описує матеріальна точка у просторі, називається **траєкторією руху**.

Зауважимо, що форма траєкторії руху точки істотно залежить від вибору системи відліку. Наприклад, у системі відліку, пов'язаній із Сонцем, траєкторії руху планет мають форму еліпсів; у системі відліку, пов'язаній із Землею, їхні траєкторії ускладнюються, включаючи петлеподібні рухи.

Сумарна довжина елементів траєкторії, пройдена точкою за заданий проміжок часу, називається **шляхом**. З означення випливає, що шлях є монотонно зростаючою функцією часу:

$$s = f(t) \quad (2)$$

Таким є **координатний спосіб** опису руху точки.

Розглянемо **векторний спосіб** опису руху точки, який у деяких задачах є більш раціональним. За цим способом положення точки у просторі визначається радіусом-вектором $\vec{r}$, пов'язаним із системою відліку (точкою O , рис. 2, a):

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (3)$$

Рух точки за час Δt визначається вектором переміщення $\Delta \vec{r}$. Цей вектор чисельно дорівнює довжині відрізка прямої, що сполучає початкове і кінцеве положення точки через час Δt ; стрілка в кінці відрізка вказує на напрям руху точки. В разі кількох послідовних переміщень

точки сумарний вектор переміщення знаходять за правилом паралелограма (або послідовного відкладання векторів, рис. 2, б). Такі величини, як переміщення, швидкість, прискорення, сила та інші, що задаються числовим значенням і напрямом та додаються за правилом паралелограма, називаються *векторними*.

Величини, для визначення яких досить тільки числового значення, називаються *скалярними* (скалярами). Такими, наприклад, є час, шлях, маса.

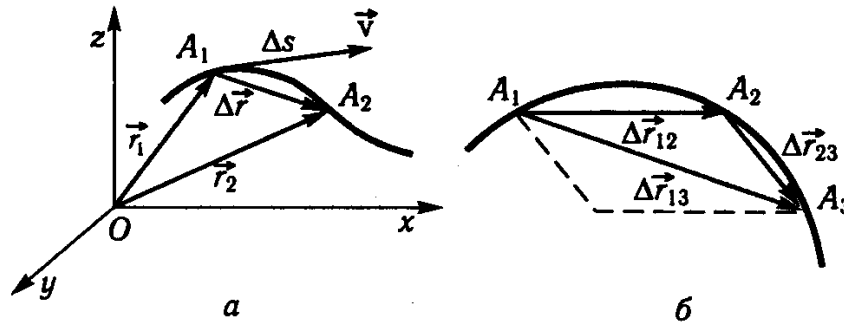


Рис. 2

Крім додавання виконується також операція віднімання векторів. Її відображено на рис. 2, а:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2,$$

де вектор переміщення $\Delta \vec{r}$ визначає зміну радіуса-вектора рухомої точки за час Δt .

Між векторним та координатним способами опису руху точки існує безпосередній зв'язок, а саме:

1) числові значення проекцій радіуса-вектора рухомої точки на координатні осі системи з тим самим початком відліку дорівнюють координатам точки, тобто

$$r_x = x = \dot{f}_1(t), \quad r_y = y = \dot{f}_2(t), \quad r_z = z = \dot{f}_3(t);$$

іншими словами, радіус-вектор можна задати через координати точки, тобто

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - *орти* (одиничні вектори, напрямлені вздовж відповідних координатних осей);

2) траєкторією руху точки є *годограф* радіуса-вектора (крива, яку описує кінець вектора на рис. 2, а). Рівняння $x = \dot{f}_1(t)$, $y = \dot{f}_2(t)$, $z = \dot{f}_3(t)$, (1) є рівнянням годографа;

3) вектор переміщення виражається через відповідні зміни координат рухомої точки, тобто

$$\Delta \vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}.$$

3. Приклад опису прямолінійного руху

Розглянемо для прикладу *аналітичний* і *графічний* способи опису прямолінійного руху тіла. За систему відліку тут доцільно взяти пряму, по якій воно рухається. Вважатимемо цю пряму віссю координат Ox . За початок координат візьмемо початкове положення точки O (рис. 3, а).

Положення в будь-який момент часу визначатиметься координатою x як функцією часу t . Рух буде аналітично описаний, якщо знайдено функцію $x = f(t)$. Наприклад, для рівномірного прямолінійного руху

$$x = vt, \tag{1}$$

де v - швидкість руху.

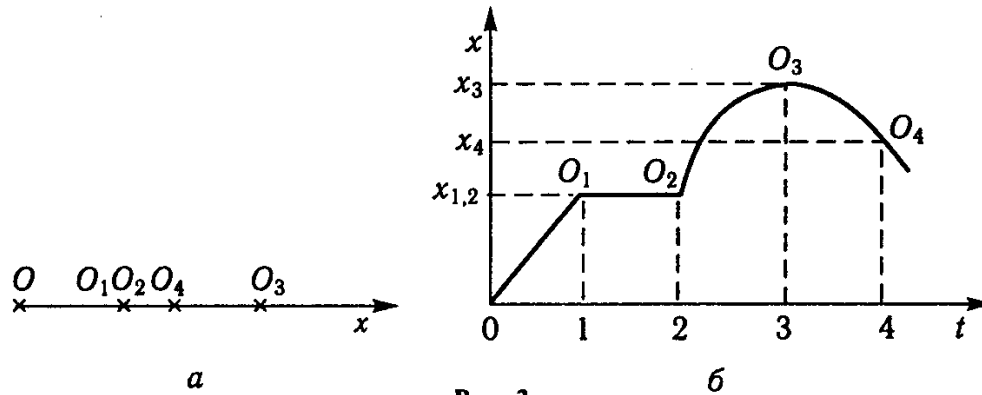


Рис. 3

Для рівнозмінного руху

$$x = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}, \quad (2)$$

де v_0 - початкова швидкість; a — прискорення руху.

Для гармонічного коливального руху

$$x = A \sin \omega t, \quad (3)$$

де A - амплітуда; ω - циклічна частота коливання.

Практично миттєві положення рухомого тіла і відповідні моменти часу можна фіксувати секундоміром та фотоапаратом або спеціальними пристроями.

Наочним і зручним для аналізу руху точки є графічний спосіб вираження залежності координати x від часу t (рис. 3, б). Графік руху показує, що там, де зі збільшенням t крива $x = f(t)$ йде вгору, точка віддаляється від O і тим швидше, чим крутіше піднімається крива; ділянка, паралельна осі часу t , відповідає зупинці точки; там, де крива спадає вниз, точка рухається у зворотному напрямі — до точки O .

Зауважимо, що значення кінцевої координати рухомої точки не можна ототожнювати з пройденим нею шляхом. Зокрема, з наведеного на рис. 3, б графіка випливає, що для знаходження пройденого точкою шляху треба до найбільшої координати x_3 додати відрізок $(x_3 - x_4)$, пройдений точкою у зворотному напрямі, і т. д. Якби точка рухалася весь час у напрямі осі x , то лише тоді координата точки та шлях були б однакові (якщо початок координат збігається з початковим положенням точки).

4. Швидкість і прискорення

Основними кінематичними величинами, що характеризують рух матеріального тіла у просторі, є швидкість і прискорення.

Швидкість - це характеристика руху тіла в кожний момент часу або в кожній точці його траєкторії. Швидкість визначається границею відношення вектора переміщення тіла $\Delta \vec{r}$ до відповідного проміжку часу Δt за умови, коли останній прямує до нуля, тобто

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1)$$

Рух тіла можна уявити як сукупність миттєвих перебувань його в послідовних точках траєкторії, тому вказану характеристику руху називають **миттєвою швидкістю**.

Швидкість - це вектор, прикладений у заданій точці траєкторії і напрямлений по дотичній до неї в цій самій точці у бік руху.

Вектор швидкості нерідко виражають у проекціях на координатні осі: або у вигляді

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

або у вигляді

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \quad (2)$$

а модуль вектора знаходять за формулою.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (3)$$

Такий суто фізичний зміст швидкості як міри руху окремого тіла.

Поряд із цим на практиці в описах рухів часто задовольняються **середньою швидкістю**, що дорівнює відношенню вектора переміщення до відповідного проміжку часу, за який воно відбулось, тобто

$$\vec{v}_c = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad (4)$$

а також **середньою «скалярною швидкістю»**, що дорівнює відношенню пройденого шляху до відповідного часу, за який цей шлях пройдено, тобто

$$v_c = \frac{s}{t}. \quad (5)$$

Формула (5) є характеристикою руху транспортних засобів, сільськогосподарських машин і живих істот на тривалих проміжках часу (коли швидкості в окремі моменти часу не цікавлять). Інша річ, коли йдеться про характеристику вогнепальної зброї - тут буває необхідно знати швидкість кулі в момент пострілу; під час запуску космічного корабля потрібно точно визначити його швидкість у момент виходу на орбіту; водій транспорту зобов'язаний контролювати швидкість у кожний момент часу за допомогою спідометра.

Одиницею швидкості в СІ є метр за секунду (м/с); на практиці широко користуються кілометром за годину (км/год), у морській справі - вузлом (1 вузол = 1 морська миля/год = 1,853 км/год), у реактивній авіації - М-числом (1 М ~ 1200 км/год).

Для прикладу наведемо значення швидкостей руху деяких тіл:

Пішохід	5.. .6 км/год
Швидкий поїзд	120 км/год
Автомобіль ВАЗ-2109	До 150 км/год
Транспортний літак	200.. .800 км/год
Морський корабель	40 вузлів
Літак-винищувач	До 3 М

5. Криволінійний рух, тангенціальне і нормальне прискорення

Розглянемо в загальному вигляді криволінійний (плоский) рух, в якому швидкість змінюється за значенням та напрямом.

Нехай тіло, що рухається криволінійно, у точці A (рис. 6, a) має швидкість $\vec{v}$, а через час Δt , в сусідній точці A_1 , його швидкість буде $\vec{v}_1$. Тоді прискорення руху в точці A визначимо за формулою

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

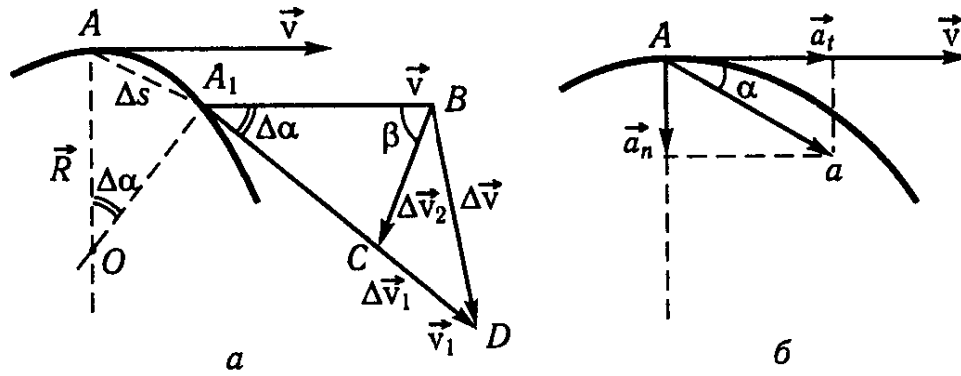


Рис. 6

Тут вектор $\Delta \vec{v}$ виражає зміну швидкості за модулем і напрямом.

Розкладемо вектор $\Delta \vec{v}$ на дві складові: $\Delta \vec{v}_1$, що визначає зміну швидкості за модулем за час Δt , та $\Delta \vec{v}_2$, що визначає зміну швидкості за напрямом за цей самий час. Щоб знайти $\Delta \vec{v}_1$, досить визначити різницю відрізків $A_1D - A_1B = A_1D - A_1C = CD$, а щоб знайти $\Delta \vec{v}_2$ досить сполучити точки B і C та визначити напрям вектора за умови, що

$$\Delta \vec{v} = \Delta \vec{v}_1 + \Delta \vec{v}_2.$$

Отже, повне прискорення можна виразити як суму двох складових:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_1 + \Delta \vec{v}_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}$$

Перша складова прискорення

$$\vec{a}_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}_\tau}{dt}, \quad (1)$$

що визначає зміну швидкості за модулем, називається **тангенціальним прискоренням**.

Тангенціальне прискорення напрямлено по дотичній до траєкторії руху в напрямі швидкості або проти неї залежно від того, збільшується чи зменшується швидкість.

Друга складова прискорення

$$\vec{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}_n}{dt} \quad (2)$$

що визначає зміну швидкості за напрямом, називається **нормальним**, або **доцентровим прискоренням**. Це прискорення напрямлене перпендикулярно до вектора швидкості. Справді, при $\Delta t \rightarrow 0$ у рівнобедреному трикутнику BA_1C кут $\Delta \alpha \rightarrow 0$, тому кут $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, а отже, $\Delta \vec{v}_2 \perp \vec{v}$.

Щоб обчислити модуль нормального прискорення, треба знайти Δv_2 . Для цього скористаємося рівністю відношень відповідних сторін подібних трикутників OAA_1 і A_1BC , а саме:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_2}{v} &= \frac{\Delta s}{R} \Rightarrow \Delta v_2 = \frac{\Delta s \cdot v}{R} \\ \vec{a}_n &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \cdot \frac{v}{R} = \frac{v^2}{R} \end{aligned} \quad (3)$$

Знаючи тангенціальне та нормальне прискорення, можна знайти модуль і напрям повного прискорення руху в заданій точці траєкторії (рис. 6, б), а саме:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}; \quad \text{tg } \alpha = \frac{a_n}{a_\tau}.$$

Тангенціальне і нормальне прискорення можуть бути ознаками різних рухів, наприклад:

1) $a_\tau = \text{const}$ - рівнозмінний рух;

- 2) $a_t = 0$, $a_n \neq 0$ - рівномірний криволінійний рух;
 3) $a_t = 0$, $a_n = \text{const}$ - рівномірний рух по колу і т. д.

6. Рух точки по колу, кутова швидкість і кутове прискорення

Поширеною різновидністю криволінійного руху є рух точки по колу, коли вектор швидкості весь час змінює свій напрям ($a_n \neq 0$) і може змінюватися також за модулем.

Звернемо увагу на те, що коли обертається кілька жорстко зв'язаних точок, наприклад A і B (рис. 8), то вони мають різні лінійні швидкості, але всі точки за проміжок часу Δt зміщуються на той самий кут $\Delta\varphi$. Тому в цілому їх рух визначають вектором **кутового зміщення** $\Delta\vec{\varphi}$ (аналогічним вектору переміщення $\Delta\vec{r}$ у поступальному русі тіла). Проте на відміну від векторів переміщення, швидкості, прискорення й інших полярних векторів, напрями яких очевидні, напрям вектора кутового зміщення визначається за певною умовою і належить до **аксіальних векторів**.

Вектор кутового зміщення є відрізком, довжина якого в певному масштабі чисельно дорівнює куту повороту, а напрямлений він по осі обертання в бік, що визначається правилом правого гвинта.

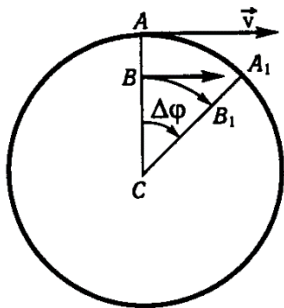


Рис. 8

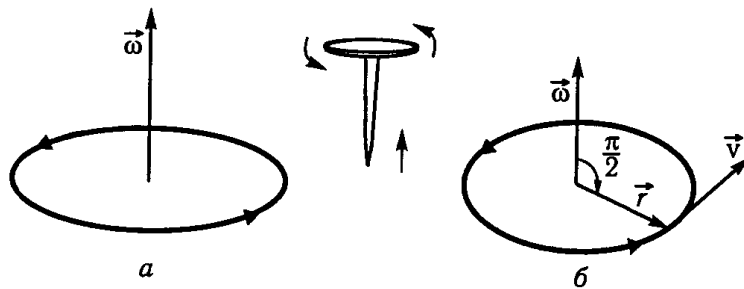


Рис. 9

За цим правилом напрям вектора кутового зміщення має збігатися з поступальним рухом гвинта, якщо його головку повертати в напрямі обертання тіла (рис. 9, а).

Ще одне зауваження. Для того щоб кутові зміщення можна було задати векторами, необхідно, щоб вони додавалися за правилом паралелограма. Ця умова справджується лише для елементарних кутових зміщень.

Основними кінематичними величинами, що характеризують обертальний рух точки, є її кутова швидкість і кутове прискорення.

Кутова швидкість точки в певний момент часу визначається границею відношення вектора кутового зміщення $\Delta\vec{\varphi}$ до відповідного проміжку часу Δt :

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (1)$$

Кутова швидкість — це вектор, напрямлений по осі обертання за правилом правого гвинта (див. рис. 9, а). Отже, кутова швидкість поряд із кількісною характеристикою обертання показує також напрям обертання в кожний момент часу. За одиницю кутової швидкості в СІ прийнято радіан за секунду (рад/с).

Для пояснення обертальних рухів зчеплених зубчастих коліс і в деяких інших випадках треба знати зв'язок між кутовою та лінійною швидкостями точки. Виразимо кутову швидкість через лінійну. Для цього у формулу кутової швидкості $\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ підставимо $\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}$:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{1}{r} = \frac{v}{r} \quad (2)$$

Оскільки для двох зчеплених зубчастих коліс лінійна швидкість зубців однакова, відповідно до виразу (2) кутові швидкості коліс обернено пропорційні їхнім радіусам.

Вираз (2) показує залежність тільки між модулями векторів $\vec{\omega}$, $\vec{v}$ і $\vec{r}$ для заданої точки. Співвідношення цих векторів повніше виражається векторним добутком

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]. \quad (3)$$

Векторний добуток - це вектор, модуль якого дорівнює $\omega r \sin \alpha$ (де α - кут між векторами $\vec{\omega}$ та $\vec{r}$), що напрямлений перпендикулярно до $\vec{\omega}$ і $\vec{r}$ у той бік, в який поступально переміщується гвинт, коли його головка робить найкоротший поворот від $\vec{\omega}$ до $\vec{r}$ (рис. 9, б).

Якщо в обертовому русі кутова швидкість змінюється, то цю зміну оцінюють кутовим прискоренням

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (4)$$

Кутове прискорення - це вектор, що збігається з напрямом кутової швидкості у прискорених рухах або напрямлений проти кутової швидкості у сповільнених рухах.

Кутове прискорення пов'язане з тангенціальним прискоренням точки, а саме:

$$\vec{a}_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\omega \cdot r)}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \beta r. \quad (5)$$

Кутове прискорення може бути ознакою різних видів обертових рухів точки, наприклад: при $\beta = 0$ маємо рівномірний обертовий рух; при $\beta = \text{const}$ - рівнозмінний обертовий рух. Для цього руху на підставі виразу (4) $d\omega = \beta dt$, звідки інтегруванням знаходимо формули для визначення швидкості і кута повороту тіла:

$$\omega = \omega_0 + \beta t; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}.$$

7. Зміщення, швидкість і прискорення у гармонічному коливальному русі

Коливальним називається рух, у якому матеріальна точка (або система точок), багаторазово відхиляючись від свого положення рівноваги, щоразу знову повертається у нього. Коливальний рух, у якому відповідні положення тіла точно повторюються через однакові проміжки часу, називають **періодичним**. Такими є рухи маятника годинника, ніжки камертона, натягнутої струни, моста тощо.

Мінімальний проміжок часу, через який повторюється положення тіла в коливальному русі, називають **періодом**.

Серед різних коливальних рухів у природі й техніці важливе значення мають гармонічні. **Гармонічним** називають коливальний рух, у якому зміщення матеріальної точки від положення рівноваги змінюється за рівнянням синуса або косинуса. Важливість його пояснюється тим, що коливання у природі та техніці часто дуже близькі до гармонічних, а крім того, будь-які періодичні зміни величин зі складнішою залежністю від часу можна розкласти на гармонічні коливання.

Прикладом гармонічного коливання може бути рух проекції точки, що рівномірно рухається по колу, на будь-яку пряму у площині руху (рис. 10, а).

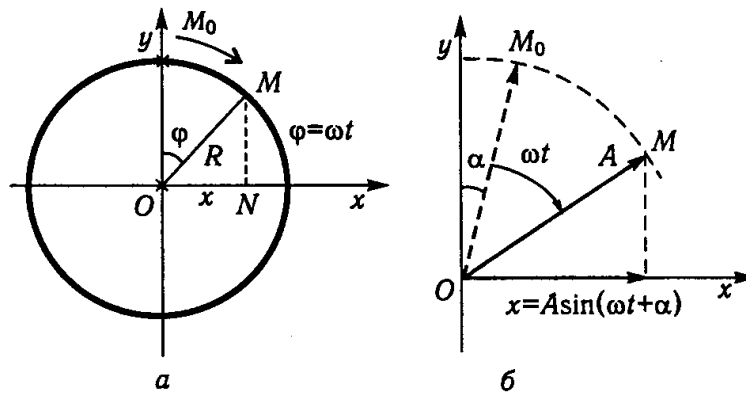


Рис. 10

Якщо радіус кола R , а кутова швидкість точки ω , то координата її проекції

$$x = R \sin \omega t. \quad (1)$$

Визначимо кінематичні елементи цього руху: x - відстань точки, що перебуває в коливальному русі, від положення рівноваги; її називають **зміщенням**. Найбільше значення зміщення точки в коливальному русі ($x = R = A$) називають **амплітудою**. Період коливання T точки M , очевидно, буде

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (2)$$

оскільки через час одного оберту точки M зміщення її проекції N точно повторюватиметься; тут ω — циклічна (або колова) частота гармонічного коливання.

Кількість коливань за секунду називають **частотою коливань** ν .

Із наведених означень випливають такі залежності:

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (3)$$

$$\omega = 2\pi\nu \quad (4)$$

Добуток ωt , що входить під знак синуса у виразі (1), називають **фазою**. Фаза - це аргумент, який дає змогу визначити числове значення і напрям зміщення, а отже, положення точки в коливальному русі у будь-який момент часу.

Рівняння гармонічного коливального руху в загальному вигляді має вигляд

$$x = A \sin(\omega t + \alpha). \quad (5)$$

де α - початкова фаза, тобто значення фази у початковий момент часу ($t = 0$).

Швидкість точки в гармонічному коливанні знайдемо як першу похідну зміщення за часом:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \alpha) \quad (6)$$

або

$$v = \omega A \sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}). \quad (7)$$

Прискорення точки в гармонічному коливанні

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha), \quad (8)$$

Інакше

$$a = -\omega^2 x; \quad (9)$$

$$a = \omega^2 A \sin(\omega t + \alpha + \pi). \quad (10)$$

Зміщення, швидкість і прискорення у гармонічному коливальному русі є гармонічно змінними величинами з однаковим періодом, але з різницею за фазою відповідно $\frac{\pi}{2}$ та π .

Крім аналітичного відображення гармонічного коливання у вигляді рівняння координати x точки M , його можна також відобразити у вигляді зміни проекції вектора амплітуди A , що рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω (див. рис. 10, *a*). Ця проекція $x = A \sin(\omega t + \alpha)$ чисельно дорівнює зміщенню точки N в коливальному русі. Звідси зрозуміло, чому ω в коливальному русі називається також **коловою частотою**.

Зручним іноді є відображення гармонічного коливання за допомогою комплексної амплітуди. За цим методом площину (рис. 10, *б*) можна розглядати як поле комплексних величин ($a = \alpha + \beta i, i = \sqrt{-1}$).

Якщо вісь Oy вважати віссю уявних чисел, то вектор амплітуди A виражатиметься комплексною величиною

$$a = A \sin(\omega t + \alpha) + i A \cos(\omega t + \alpha),$$

в якій дійсна частина має фізичний зміст.

Останній вираз за формулою Ейлера можна записати у вигляді

$$a = A e^{i(\omega t + \alpha)} = A e^{i\alpha} e^{i\omega t},$$

де незалежний від часу множник

$$\bar{A} = A e^{i\alpha}$$

називається **комплексною амплітудою**. Вона визначає амплітуду і початкову фазу коливання.

Перехід від рівнянь гармонічних коливань до відповідних комплексних величин полегшує операції диференціювання та інтегрування їх. Цей метод, як і метод векторних амплітуд, дуже зручний для додавання коливань.

Домашнє завдання:

Вивчити матеріал лекції. За підручником: «Загальний курс фізики»

І. М. Кучерука Том І. § 1.1 – 1.6

Розібрати задачі, які додаються

Приклади основних задач кінематики

З рівнянням руху $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ формально пов'язані два типи основних задач кінематики:

1) *пряма задача*, що полягає в знаходженні будь-якого параметра руху за відомим рівнянням руху (її розв'язують за допомогою послідовного застосування відповідних формул кінематики);

2) *обернена задача*, що полягає у відшуванні рівняння руху за будь-яким відомим параметром руху (вектором швидкості або прискорення). Оборнена задача взагалі значно важча від прямої.

Приклад 1. Матеріальна точка рухається за рівнянням $\vec{r} = \alpha \sin(5t)\vec{i} + \beta \cos^2(5t)\vec{j}$, де $\alpha = 2$ м, $\beta = 3$ м. Визначити вектор швидкості, вектор прискорення і траєкторію руху матеріальної точки.

Розв'язання. За рівнянням руху послідовно знаходимо складові радіуса-вектора:

$$x(t) = \alpha \sin(5t); \quad y(t) = \beta \cos^2(5t); \quad z(t) = 0; \quad (1)$$

констатуємо, що рух матеріальної точки відбувається в площині xOy . Далі знаходимо складові вектора швидкості

$$v_x(t) = 5\alpha \cos(5t); \quad v_y(t) = -5\beta \sin(10t). \quad (2)$$

За рівняннями (2) визначаємо складові вектора прискорення

$$a_x(t) = -25\alpha \sin(5t); \quad a_y(t) = -50\beta \cos(10t). \quad (3)$$

Для знаходження рівняння траєкторії виключимо час t із системи рівнянь (1), тоді

$$y = 3 - \frac{3}{4}x^2. \quad (4)$$

Отже, матеріальна точка рухається по параболі.

Приклад 2. Прискорення матеріальної точки змінюється за законом $\vec{a} = \alpha t^2\vec{i} - \beta\vec{j}$, де $\alpha = 3$ м/с², $\beta = 3$ м/с². Знайти, на якій відстані від початку координат вона буде в момент часу $t = 1$ с, якщо при $t = 0$ маємо $v_0 = 0$ і $z_0 = 0$.

Розв'язання. З умови випливає, що матеріальна точка рухається в площині xOy . Для знаходження відстані точки від початку координат у заданий момент часу необхідно знати рівняння руху.

Спочатку за складовими прискорення визначимо відповідні складові швидкості:

$$\frac{dv_x}{dt} = \alpha t^2; \quad \frac{dv_y}{dt} = -\beta; \quad v_x = \frac{\alpha t^3}{3} + C_1; \quad v_y = \beta t + C_2. \quad (1)$$

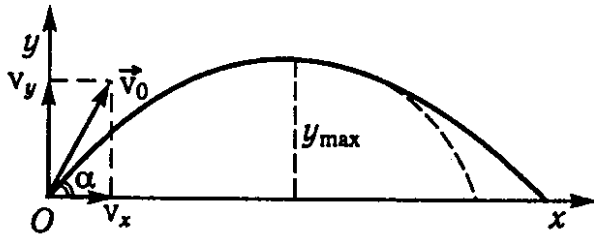


Рис. 7

З урахуванням початкових умов при $t = 0$ дістаємо $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Далі за системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha t^3}{3}, \quad \frac{dy}{dt} = -\beta t$$

знаходимо складові радіуса-вектора

$$x(t) = \frac{\alpha t^4}{12} + C_3; \quad y(t) = -\frac{\beta t^2}{2} + C_4, \quad (2)$$

де згідно з початковими умовами $C_3 = C_4 = 0$. Рівняння руху знайдено:

$$\vec{r}(t) = \frac{\alpha t^4}{12} \vec{i} - \frac{\beta t^2}{2} \vec{j}. \quad (3)$$

За модулем радіуса-вектора визначаємо шукану відстань матеріальної точки від початку координат у момент часу $t = 1$ с:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad r = 1,52 \text{ м.}$$

Приклад 3. Описати рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, якщо тілу надали початкової швидкості v_0 під кутом α до горизонту (рис. 7). Знайти:

- 1) рівняння руху тіла;
- 2) траєкторію його руху;
- 3) найбільшу висоту підняття над горизонтом;
- 4) далькість польоту.

Розв'язання. 1. За складовими швидкості по координатних осях

$$v_x = v_0 \cos \alpha; \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

робимо висновок, що в напрямі осі Ox точка рухатиметься рівномірно, оскільки $v_x = \text{const}$, а в напрямі осі Oy – рівномірно сповільнено, бо v_y рівномірно зменшується з часом. Тому координатами точки для будь-якого моменту часу будуть

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad (1)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad (2)$$

де g – прискорення вільного падіння.

2. Якщо з рівнянь (1) і (2) виключити час, то дістанемо рівняння траєкторії в явному вигляді. З рівняння (1) $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$. Підставивши це значення в рівняння (2), матимемо

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (3)$$

Отже, тіло летітиме по параболічній траєкторії.

3. Найбільшу висоту підняття тіла над горизонтом знайдемо як максимум координати y із рівняння (2). Знаходимо похідну і прирівнюємо її до нуля:

$$\dot{y} = v_0 \sin \alpha - gt = 0,$$

звідки

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (4)$$

де t_1 – час, за який тіло досягає максимальної висоти. Підставивши це значення в рівняння (2), дістанемо

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (5)$$

4. Час (4), що відповідає найвищому положенню тіла над горизонтом, визначає час підняття тіла по траєкторії руху (або час зниження). Тому весь час польоту тіла

$$t_n = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g},$$

а далькість польоту

$$x = 2v_0 \cos \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (6)$$

Із формули (6) випливає, що далькість польоту тіла залежить від кута, під яким його кинули до горизонту, причому максимальне значення ця величина має при $\alpha = 45^\circ$.

Проте в розглянутому прикладі не враховано опору середовища. Насправді внаслідок опору повітря тіла рухаються не по параболі, а по балістичній кривій (штрихова крива на рис. 7).

Приклад 1. На першому проміжку часу t_1 швидкість тіла на трасі дорівнювала v_1 , а на наступному проміжку часу t_2 вона становила v_2 . З якою середньою швидкістю рухалося тіло?

Розв'язання. В умові йдеться про знаходження середньої скалярної швидкості, тому за її означенням

$$v_c = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2}.$$

Приклад 2. Першу половину часу тіло рухалося зі швидкістю $v_1 = 20$ м/с під кутом $\alpha_1 = 60^\circ$ до заданого напрямку, а другу – зі швидкістю $v_2 = 40$ м/с під кутом $\alpha_2 = 120^\circ$ до того самого напрямку. Знайти середню швидкість руху тіла.

Розв'язання. Йдеться про знаходження середньої векторної швидкості. Оскільки тіло зазнало двох переміщень, сумарне його переміщення знайдемо за векторною сумою (рис. 4):

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_1 + \Delta \vec{r}_2,$$

звідки

$$\bar{v}_c = \frac{\Delta \bar{r}_1 + \Delta \bar{r}_2}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{r}_1 + \Delta \bar{r}_2}{2\Delta t_i} = \frac{1}{2}(\bar{v}_1 + \bar{v}_2).$$

Відображаючи векторну рівність у проекціях, дістаємо

$$v_{cx} = \frac{v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2}{2}; \quad v_{cx} = -5 \text{ м/с};$$

$$v_{cy} = \frac{v_1 \sin \alpha_1 + v_2 \sin \alpha_2}{2}; \quad v_{cy} = 15\sqrt{3} \text{ м/с}.$$

За одержаними значеннями можна знайти модуль вектора середньої швидкості та її напрям α .

У змінному русі швидкість може змінюватися і за значенням, і за напрямом. Повну зміну швидкості за час Δt знаходять за векторною різницею (рис. 5):

$$\bar{v}' - \bar{v} = \Delta \bar{v}. \quad (6)$$

Для оцінювання зміни швидкості в часі введено фізичну величину, що називається *прискоренням*. У певний момент часу або в заданій точці траєкторії прискорення є границею відношення вектора зміни швидкості $\Delta \bar{v}$ до відповідного проміжку часу Δt :

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}. \quad (7)$$

Прискорення – це вектор, який за напрямом збігається з вектором $\Delta \bar{v}$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Запис вектора прискорення за координатними складовими набирає вигляду

$$\bar{a} = \frac{d^2 x}{dt^2} \bar{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \bar{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \bar{k}. \quad (8)$$

Зазначимо, що $\Delta \bar{v}$ може не збігатися з вектором швидкості (як на рис. 5), тому вектор прискорення взагалі не збігається з напрямом вектора швидкості.

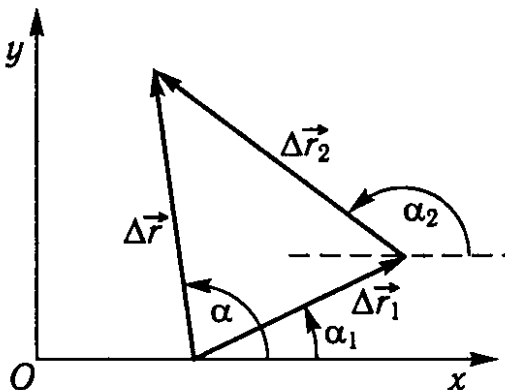


Рис. 4

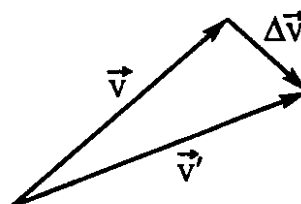


Рис. 5

За виразами (7) і (8) розв'язують задачі двох типів: на знаходження прискорення, коли відомо функції $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$ або $v = f(t)$, і на відношення цих функцій, коли відомо прискорення. Задачі першого типу розв'язують методом диференціювання, другого – методом інтегрування. Наприклад, для випадку рівномірно прискореного руху ($a = \text{const}$), що відбувається в напрямі осі Ox , з виразу (7) дістаємо

$$dv_x = a dt,$$

звідки інтегруванням знаходимо відомі вирази для швидкості та шляху:

$$v_x = at + C_1; \quad x = \frac{at^2}{2} + C_1t + C_2,$$

де C_1 , C_2 – сталі інтегрування. Вони визначаються з початкових умов, а саме: при $t = 0$ маємо $C_1 = v_0$, $C_2 = x_0$.

Отже, для розв'язання названих задач, крім прискорення, мають бути задані початкові умови, тобто координати початкового положення точки (x_0, y_0, z_0) і початкова швидкість її руху $\vec{v}_0(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$.

Лекція № 3

1.1.4. Завдання динаміки. Перший закон Ньютона. Маса тіла Другий закон Ньютона. Третій закон Ньютона. Сила. Статистичний і динамічний прояв сили. Закон збереження імпульсу. Принцип відносності Галілея. Рух тіла зі зміною масою. Рівняння Мещерского.

1. Завдання динаміки

Динаміка вивчає рухи тіл під дією прикладених до них сил. Стан спокою або руху тіла змінюється внаслідок взаємодії його з іншим тілом. Наприклад, молоток під час забивання цвяха дістає рух завдяки взаємодії з рукою людини, а зупиняється він унаслідок взаємодії з цвяхом, і т. д. Величину, що є мірою взаємодії тіл, називають **силою**.

Для розуміння явищ природи потрібно з'ясувати відношення сили до руху. Початкові спостереження за переміщенням знарядь праці наводили на думку, що сила є причиною руху. Саме це стверджував давньогрецький філософ і вчений Арістотель (384—322 до н. е.). Цей погляд проіснував понад 19 століть як очевидна істина.

Тільки в XVII ст. видатний італійський вчений Галілео Галілей (1564-1642) розкрив справжній закон руху тіл. Він показав, що всяке тіло має властивість зберігати рух - швидкість руху, а сила є лише причиною зміни руху. У цьому переконуємося на простих прикладах. Якщо м'яч покотити по траві, то він швидко зупиниться, а по льоду він котиться значно далі. Сила тертя сповільнює рух м'яча. Зусилля коня при переміщенні воза, зусилля людини при їзді на велосипеді по горизонтальному шляху зводяться до подолання сил тертя. Очевидно, якби на

тіло не діяли ніякі сили, то його природним станом був би рівномірний прямолінійний рух або стан спокою.

Властивість тіла зберігати рівномірний прямолінійний рух або стан відносного спокою називають **інертністю**. Інертність - властивість матерії зберігати швидкість руху, перебувати в русі. Саме явище збереження швидкості руху або стану спокою у разі зрівноваження зовнішніх дій на тіло називають **інерцією**. Відкриття інертності тіл було важливим кроком у розвитку фізики і філософії. Воно свідчило, що природним станом матерії є стан руху, а сила взаємодії є лише причиною зміни швидкості руху - прискорення.

Практичні завдання динаміки зводяться до визначення прискорення руху за заданими силами або до знаходження діючих сил за змінами руху, які спричиняють ці сили.

2. Перший закон Ньютона

Узагальнюючи досягнення науки свого часу, великий англійський вчений І. Ньютон (1643-1727) сформулював основні закони динаміки. Вони викладені в його знаменитій праці «Математичні начала натуральної філософії», опублікованій у 1687 р. Властивість інертності тіл І. Ньютон сформулював як перший закон механіки: **будь-яке тіло перебуває у стані спокою або прямолінійного і рівномірного руху, доки й оскільки воно не змушене буде прикладеними силами змінити цей стан.**

Опис руху тіла залежить від вибору системи відліку. І. Ньютон допускав існування абсолютного простору та часу, а отже, нерухомої системи відліку і стосовно неї формулював закон.

Пізніше прийшло переконання, що такої абсолютно нерухомої системи відліку не існує, проте було виявлено, що закон справджується у системах, пов'язаних із тілами, які переміщуються рівномірно та прямолінійно відносно нерухомої гіпотетичної системи. Такі системи стали називати **інерціальними**, а перший закон Ньютона дістав уточнене формулювання: **існують такі системи, в яких тіло перебуватиме у спокої або прямолінійному і рівномірному русі, якщо дія на нього решти тіл компенсується.**

У системі, пов'язаній з поверхнею Землі, можна навести приклади збереження тілом стану спокою; складніше показати збереження ним рівномірного та прямолінійного руху, оскільки неможливо створити такі умови, в яких на тіло не діяли б сили. Проте навіть прості досліди з бруском на візку (рис. 11) переконують в існуванні інертності:

1) коли візок зі стану спокою раптово починає рухатися, то брусок, аби зберегти стан спокою, падає в напрямі, протилежному руху;

2) якщо візок, що перебуває в русі, раптово зупинити, то брусок падає в напрямі руху;

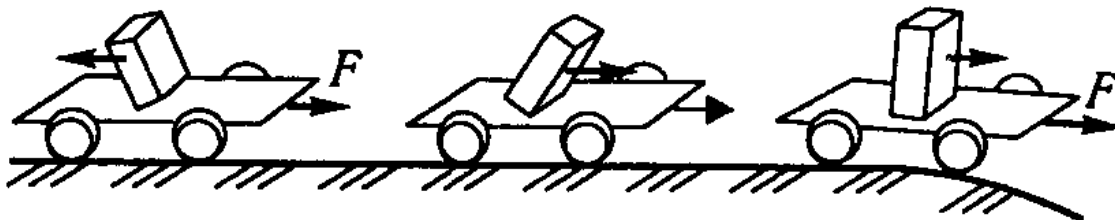


Рис. 11

3) якщо прямолінійний рух візка змінюється на криволінійний, то брусок падає в напрямі попереднього руху.

Явище інерції має істотне значення на практиці. Інертність ураховують у транспорті (в разі зрушення з місця, розгону і гальмування транспортних засобів перед зупинкою - в усіх цих випадках для зміни стану потрібен певний час, навіть при значній діючій силі); куля і снаряд після вильоту зі ствола рухаються за інерцією; на інерції ґрунтується дія зернопультів, механізмів для передавання силосної маси; явище інерції використовується у різних автоматичних пристроях.

3. Маса тіла

Важливою фізичною величиною, що визначає властивості матерії, є *маса*.

Початкове поняття маси як міри кількості речовини склалося з практики ще до формування основних законів механіки. У процесі товарного обміну люди порівнювали тіла за їхньою вагою і навіть Г. Галілей ототожнював поняття маси і ваги. Згодом було виявлено, що вага тіла змінюється залежно від географічної широти. У зв'язку з цим виникла потреба уточнити поняття маси та ваги.

І. Ньютон провів серію дослідів і знайшов, що відношення сили тяжіння тіла до прискорення вільного падіння цього тіла в порожнечі є сталою величиною, яка не залежить від положення тіла на земній поверхні. За Ньютоном, під цією сталою і незмінною величиною стали розуміти масу тіла. По суті те поняття маси, що склалося у процесі дослідження взаємодії тіл із Землею, характеризує гравітаційні властивості речовини. Тому цю величину доцільніше було б назвати *гравітаційною масою*.

Першим законом механіки визначено ще одну загальну властивість речовини - інертність. У дослідах було доведено, що відношення будь-якої сили до прискорення, якого вона надає тілу, є сталою величиною і не залежить від походження сили. Під цією сталою та незмінною величиною стали розуміти масу тіла як міру інертності речовини. Тому її можна було б назвати *інертною масою*.

Так у класичну фізику ввійшло двоїсте поняття маси як відображення двох різних властивостей речовини: міри інертності та міри гравітаційних властивостей.

Численні досліди, проведені І. Ньютоном й особливо угорським фізиком Л. Етвешем (1848-1919), показали, що для будь-яких двох тіл відношення мас тяжіння дорівнює відношенню їхніх інертних мас. Це впливає з того, що всі тіла падають на поверхню Землі з однаковим прискоренням. Справді, тут силу, що діє на тіло, можна виразити через масу тяжіння m_T або інертну масу m_i . Для двох тіл матимемо:

$$\gamma \frac{m_T M}{r^2} = m_i' g \quad (1)$$

$$\gamma \frac{m_T M}{r^2} = m_i'' g \quad (2)$$

Якщо поділити першу рівність на другу, то дістанемо $\frac{m_T'}{m_T''} = \frac{m_i'}{m_i''}$, тобто маси тяжіння тіл пропорційні їхнім інертним масам.

Щоб перевірити цю залежність, І. Ньютон вимірював прискорення земного тяжіння маятниками різних мас і матеріалів. У всіх випадках g було однакове в заданому місці.

Одиницю гравітаційної маси можна було б визначити незалежно від одиниці інертної маси за законом тяжіння

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (3)$$

поклавши, наприклад, $\gamma = 1$. Проте, зважаючи на пропорційність гравітаційної та інертної мас, для спрощення обчислень одиницю гравітаційної маси вибрали так, щоб для заданого тіла гравітаційна маса виражалася однаковим числом з інертною масою і мала однакове найменування, наприклад:

$$m_i = 200 \text{ г}; m_T = 200 \text{ г}.$$

У такому разі коефіцієнт пропорційності матиме певне значення та найменування. На практиці вимірювання інертної маси ґрунтується на порівнянні мас тяжіння за допомогою терезів.

У класичній фізиці пропорційність гравітаційної та інертної мас уявлялась випадковою, оскільки властивість інерції, а також закони механіки зберігають свій зміст і без сили тяжіння. Лише в теорії відносності було з'ясовано зв'язок між законами механіки та законом тяжіння, прямим наслідком якого є пропорційність гравітаційної та інертної мас. Саме тому числові значення мас у фізиці не розрізняють.

3. Другий закон Ньютона

Із першого закону механіки відомо, що сила спричинює зміну руху тіла, зумовлює його прискорення. Другий закон Ньютона стверджує: **зміна кількості руху пропорційна прикладеній рушійній силі й відбувається по прямій, по якій діє ця сила.**

З метою конкретизації змісту закону і виходу на експериментальну перевірку його формулюють у такому вигляді: **тіло, на яке діють сили, рухається з прискоренням, значення і напрям якого визначаються відношенням рівнодійної всіх сил до маси тіла:**

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Велика кількість дослідів доводить, що *прискорення руху пропорційно діючій силі та обернено пропорційна масі тіла. (маса стала)*

Здебільшого другий закон механіки записують у вигляді

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (1)$$

У випадках коли маса не залишається сталою (наприклад розглядаючи рух ракети) треба користуватися формулюванням закону в загальному вигляді, а саме: **зміна механічного імпульсу тіла пропорційна прикладеній силі й відбувається в напрямі діючої сили:**

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \quad (2)$$

де $m\vec{v} = \vec{p}$ - імпульс (кількість руху тіла), $\vec{F}$ - результуюча зовнішня сила.

Інакше, за виразом (2) сила визначається швидкістю зміни імпульсу тіла:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (3)$$

Ще французький вчений Р. Декарт (1596-1650), досліджуючи взаємодію тіл, дійшов висновку про існування **певної міри механічного руху**. Цією мірою є імпульс - $m\vec{v}$. Імпульс тіла - це вектор однакового з вектором його швидкості напрямку.

Імпульс відіграє істотну роль у фізиці та на практиці. Наприклад, шофер знає, що час, потрібний для того, щоб зупинити навантажену машину, навіть при малій швидкості, не менший від часу гальмування розвантаженої машини при великій швидкості. Механічні рухи машини еквівалентні, якщо однакові добутки її маси на швидкість.

Рівняння (3) можна записати у вигляді

$$d\vec{p} = \vec{F}dt,$$

звідки випливає, що зміна імпульсу тіла залежить не лише від прикладеної сили, а й від часу її дії. Тому та сама зміна імпульсу може бути спричинена великою силою за малий час дії та малою силою за великий час дії. Добуток сили на час її дії називають **імпульсом сили**.

Вирази $m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ і $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ називаються **рівняннями динаміки матеріальної точки**.

Під час розв'язування задач на рух тіла сталої маси спочатку складають рівняння динаміки у векторній формі:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i,$$

а потім виражають його у проекціях на координатні осі:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_z. \quad (4)$$

За формулами (4) розв'язують задачі з механіки двох типів: на знаходження діючих сил, коли відомо масу матеріальної точки та її координати як функції часу $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, і на знаходження цих функцій, коли відомо діючі сили. Задачі першого типу розв'язують методом диференціювання, другого - методом інтегрування. Зрозуміло, що в останніх задачах для визначення сталих інтегрування мають бути задані початкові умови: координати початкового положення точки (x_0, y_0, z_0) та її початкова швидкість $v_0 (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$.

Вираз другого закону Ньютона називають **основним рівнянням динаміки матеріальної точки**.

4. Третій закон Ньютона

За третім законом механіки зовнішня дія на тіло, яка зумовлює зміну його руху, має характер взаємодії: **якщо на тіло діє сила, то це означає, що на нього діє інше тіло, причому останнє, у свою чергу, зазнає впливу першого**.

Третій закон Ньютона стверджує: **дії завжди відповідає рівна протидія, іншими словами, сили дії двох матеріальних точок одна на одну однакові за значенням і протилежні за напрямом**:

$$\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21} \quad (1)$$

Зауважимо, що сили дії і протидії прикладено до різних тіл; тому не можна вважати, що вони мають рівнодійну, до того ж таку, яка дорівнює нулю.

Наочною ілюстрацією закону є статичні взаємодії тіл, за яких тіла перебувають у рівновазі. Наприклад, сила тиску предметів на стіл, обумовлена їхньою масою, дорівнює протидії сил пружності, зумовлених деформацією стола; сила тиску повітря у гумовій камері м'яча дорівнює сумі сил пружності, зумовленої деформацією розтягу стінок м'яча, і сил зовнішнього тиску. У прикладі, наведеному І. Ньютоном, сила тиску гори дорівнює силі тиску Землі на гору, бо інакше з'явився б надлишок сили в одному напрямі, що привело б систему двох тіл у прискорений рух, а це суперечить першому закону механіки.

Рівність дії та протидії можна продемонструвати на такому досліді. Якщо на шальці терезів зрівноважити склянку з водою (рис. 13, а) та після цього занурити у воду залізний циліндр, підвішений на динамометрі, то рівновага на терезах порушиться (рис. 13, б). Шалька з посудиною опуститься, а розтяг пружини динамометра зменшиться. На циліндр діє виштовхувальна сила води; отже, така сама сила діє також на воду.

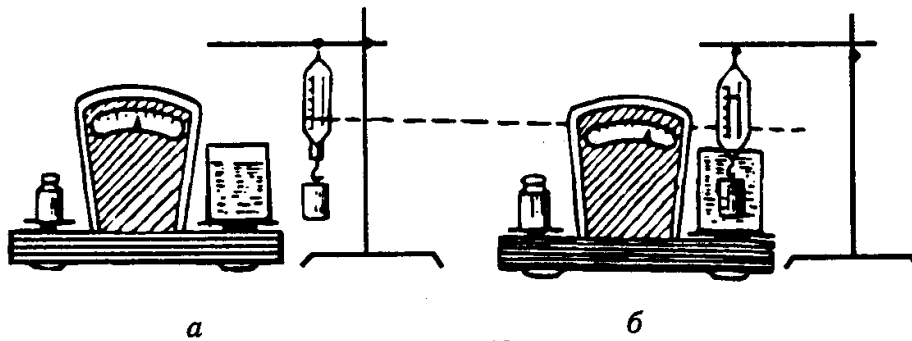


Рис. 13

Щоб відновити рівновагу на терезах, треба на ліву шальку покласти додаткові важки.

Рівність дії та протидії тіл у стані руху можна проілюструвати взаємодією магнітного і залізного брусків. Якщо їх розмістити за допомогою поплавків на поверхні води, то вони одночасно попливуть назустріч один одному. Так само двоє людей, які стоять на низьких легко рухомих візках і натягують вірвовку (рис. 14), рухаються назустріч один одному незалежно від того, чи тягне за вірвовку один із них, чи натягують її обоє разом. У кожному випадку візки перебувають під дією рівних і протилежно напрямлених сил, а прискорення їхніх рухів і пройдені шляхи обернено пропорційні їхнім масам.

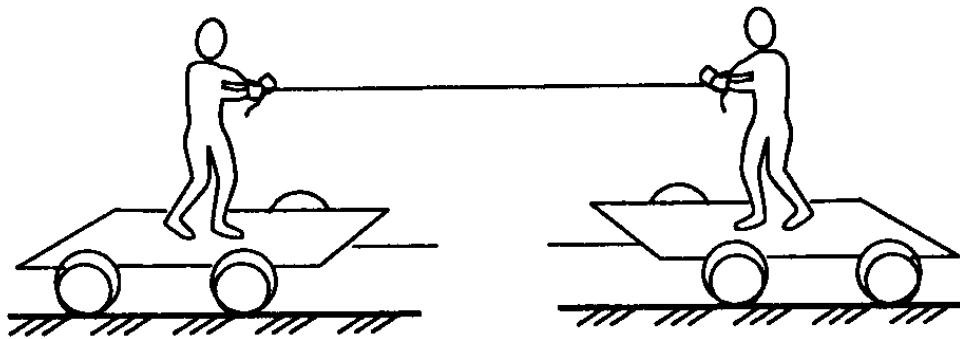


Рис. 14

Йдучи, людина по суті весь час відштовхує Землю назад, а Земля з такою самою силою штовхає людину вперед. Оскільки маса Землі дуже велика, її зміщення від поштовху людини непомітне. Так само автомобілі та локомотиви рухаються унаслідок відштовхування їхніх ведучих коліс від Землі через тертя.

Це можна проілюструвати на досліді з іграшковим заводним автомобілем. Якщо його поставити на скляну пластинку, то під час руху автомобіля пластинка зміщуватиметься у протилежному напрямі (рис. 15). Оскільки для руху автомобіля і локомотива істотне значення має тертя, що виникає між ведучими колесами та поверхнею, по якій вони переміщуються, силу тертя в цих випадках називають *рушійною*, в інших - *гальмівною*.

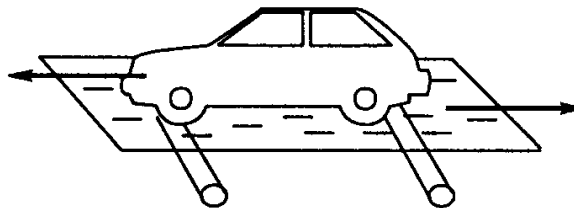


Рис. 15

5. Сила. Статистичний і динамічний прояви сили

Сила - це міра зовнішньої дії на тіло, що виникає у процесі його взаємодії з іншим тілом.

Вводячи поняття «сила» для з'ясування різних фізичних явищ, не треба забувати про справжнє відношення сили до руху. Ще Ф. Енгельс у своїй «Діалектиці природи» пояснював, що коли будь-який рух переноситься з одного тіла на інше, то, оскільки рух переходить, тобто активний, його можна розглядати як причину руху і цей активний рух виступає як сила; коли ж цей самий рух є переносним, пасивним, він виступає як прояв сили. Тобто сила як активний бік руху вимірюється своїм проявом, кількістю переданого руху.

Результат дії сили залежить від її значення, напрямку у просторі та точки прикладання до тіла. **Сила** - це векторна величина. Коли в заданій точці прикладено кілька сил, то їх можна додати за правилом паралелограма і знайти рівнодійну силу.

Якщо під дією кількох сил тіло зберігає свій стан спокою або рівномірно прямолінійного руху, то таку систему діючих сил називають *зрівноваженою*, або *еквівалентною нулю*.

Результати дії сили в різних практичних прикладах легше пояснити, якщо розрізняти слід за І. Ньютоном **статичні та динамічні прояви сили**. Відповідно розрізняють статичний і динамічний способи вимірювання сили.

Результатами **статичного прояву сили** є тиск на тіла, що перешкоджають рухові, та їх деформація. За цими результатами дії сили важільними або пружинними терезами здійснюють статичне вимірювання сили. Зрозуміло, що сила, яка виявляється статично, завжди зумовлює рівну їй за значенням і протилежну за напрямом реакцію опори - силу пружної деформації.

Результатом **динамічного прояву сили** є прискорення - тангенціальне або нормальне. У таких випадках силу визначають за другим законом механіки $F = ma$, зокрема за виразом доцентрової сили $F = \frac{mv^2}{r}$

Заслужують на увагу випадки, коли сила одночасно виявляється і статичною, і динамічною. Наприклад, у русі тіла по гладенькій похилій площині (рис. 16) складова його сили тяжіння, перпендикулярна до площини, проявляється статично, а складова сили тяжіння, паралельна площині,—динамічно. Коли автомашина проїжджає опуклий міст (рис. 17), її сила тяжіння виявляється частково динамічно як доцентрова сила, а частково статично як сила тиску на міст. Тому сила тиску автомашини на опуклий міст менша від її сили тяжіння до Землі.

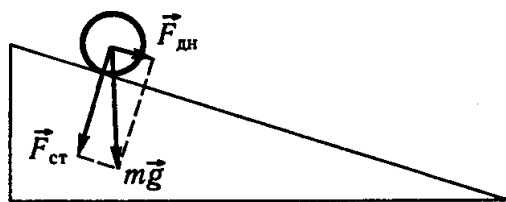


Рис. 16

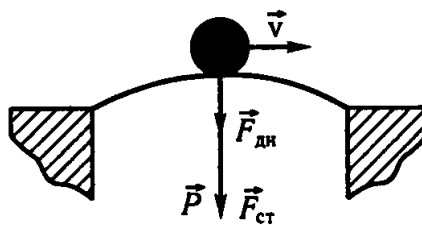


Рис. 17

Співвідношення між статичним і динамічним проявами сили тяжіння можна проілюструвати на такому прикладі. Нехай в кабіні ліфта пасажир стоїть на площадці пружинних терезів (рис. 18). У нерухомому положенні вага пасажирів 588 Н. Що показуватимуть терези, коли кабіна опускатиметься?



Рис. 18

Відповідаючи на це запитання, слід указати на статичний прояв сили тяжіння, для чого треба визначити спочатку її динамічний прояв. Розглянемо деякі можливі випадки:

1) коли кабіна рівномірно опускається ($v = \text{const}$), динамічний прояв сили тяжіння дорівнює нулю, тому терези показують 588 Н;

2) якщо кабіна опускається із прискоренням, наприклад, $4,9 \text{ м/с}^2$, то динамічний прояв сили тяжіння дорівнюватиме 294 Н, а статичний $588 - 294 = 294 \text{ Н}$. Таку силу показуватимуть терези;

3) якщо кабіна опускатиметься із прискоренням $9,8 \text{ м/с}^2$, то вся сила тяжіння проявлятиметься динамічно; тому терези показуватимуть нуль.

Випадки, в яких сила тяжіння тіла повністю проявляється динамічно, називають **станом невагомості тіла**. Це буває, коли тіло вільно падає, рухається по вертикальній петлі (у верхній точці), а також під час руху штучних супутників Землі. Стан невагомості для людини незвичний. Стоячи на підлозі, вона не відчуває звичайного напруження ніг; піднімаючи руку або предмет, не відчуває звичайних зусиль. У невідповідності

людини це може спричинити психічні та фізіологічні розлади, проте польоти космонавтів показали, що у стані невагомості підготовлена людина може почувати себе добре і виконувати різні види робіт.

За характером взаємодії в механіці розрізняють три типи сил: **пружні сили, сили тертя та сили тяжіння**.

Сили перших двох типів виникають від взаємодії тіл унаслідок дотику; сили тяжіння проявляються унаслідок взаємодії тіл на відстані через особливе гравітаційне поле, що існує як окремий вид матерії навколо кожного тіла.

Із викладеного випливає, що не можна плутати вагу тіла із силою тяжіння. Вага тіла — це тільки складова сили тяжіння, що проявляється статично. **Вагою тіла** називають силу G (рис. 19), з

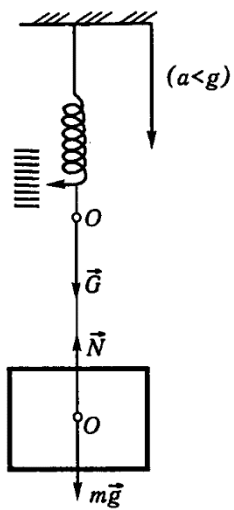


Рис. 19

якою тіло діє на нерухому відносно нього горизонтальну підставку або на нерухомий відносно нього підвіс. Вага тіла прикладається до опор і може істотно змінюватися залежно від їх руху. На розглянуте тіло, крім сили тяжіння mg , діє реакція опори N ; тому основне рівняння динаміки для нього матиме вигляд

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

6. Закон збереження імпульсу

Одним із найважливіших законів природи є закон збереження імпульсу. Прояви цього закону вперше помітив Р. Декарт, досліджуючи удар двох тіл. Він дійшов висновку, що одне тіло, стикаючись з іншим, передає йому стільки руху, скільки саме при цьому втрачає. Р. Декарт помилково розумів під імпульсом скалярну величину, що дорівнює добутку маси тіла на його швидкість. У 1668 р. голландський вчений Х.

Гюйгенс (1629-1695) уточнив формулювання закону збереження імпульсу, вказавши на векторний характер імпульсу.

Зміст закону збереження імпульсу розкрив І. Ньютон, сформулювавши через зміну цієї величини другий закон механіки. Було з'ясовано, що закон збереження імпульсу під час взаємодії тіл в ізолюваній системі відображається у сутності самих законів механіки. Справді, якщо вступають у взаємодію дві матеріальні точки, що мають маси m_1, m_2 і початкові швидкості v_1, v_2 , то через час Δt їхні швидкості стануть іншими - u_1, u_2 . Зміна кількості руху кожної точки визначається за другим законом механіки, а саме:

$$m_1 u_1 - m_1 v_1 = F_1 \Delta t$$

$$m_2 u_2 - m_2 v_2 = F_2 \Delta t$$

Однак за третім законом механіки

$$F_1 \Delta t = -F_2 \Delta t;$$

тому

$$m_1 u_1 - m_1 v_1 = -(m_2 u_2 - m_2 v_2), \quad (1)$$

звідки

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$

тобто сумарна кількість руху точок до і після їх взаємодії однакова.

Цей висновок можна поширити на довільну кількість точок ізолюваної системи, оскільки взаємодія будь-якої пари точок за принципом незалежності дії сил відповідатиме рівності (1). Закон збереження імпульсу виражають так: $\sum m_i \vec{v}_i = \text{const}$, тобто при всяких взаємодіях точок ізолюваної системи векторна сума їхніх імпульсів залишається сталою.

Наведемо приклади, що ілюструють закон збереження імпульсу.

1. Коли людина хоче вийти з човна і переміщується у ньому до берега, човен одночасно відходить від берега. Тут імпульс, якого набуває людина, компенсується імпульсом човна. Швидкості руху обох тіл обернено пропорційні їхнім масам; тому чим масивніший човен, тим легше з нього зійти на берег.

2. Імпульс системи гармата-снаряд до та після пострілу має залишатися сталим і дорівнювати нулю. Тому імпульс, якого набуває снаряд, що вилітає зі ствола, компенсується імпульсом гармати протилежного напрямку - її відкочуванням.

У сучасних гарматах зміщується лише ствол, а лафет утримується на місці вкопаними в землю сошниками. При відбої ствола стискається пружина або повітря амортизатора, які потім повертають ствол на місце. В автоматичній зброї відбій використовується для її перезарядження.

3. На законі збереження імпульсу ґрунтується сучасна реактивна техніка. Рух ракети можна продемонструвати на моделі реактивного візка (рис. 22). Для цього в його балон через нижню трубку з нипелом нагнітають повітря. У центрі знаходиться реактивне сопло, закрите

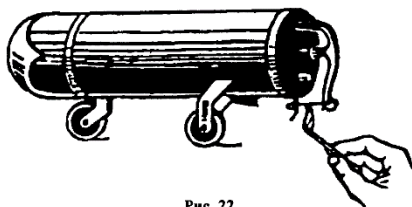


Рис. 22

гумовою пластинкою на важелі, рухомий кінець якого прикріплений ниткою до корпусу візка. Якщо нитку перепалити, то стиснуте повітря із шумом вирветься через сопло, а візок рухатиметься у протилежний бік. Імпульс повітря, що виходить через реактивне сопло, компенсується імпульсом візка.

У справжній ракеті через реактивне сопло виходять газоподібні продукти згоряння заряду ракети. Чим більші сумарна маса і швидкість вилітних газів, тим більшої швидкості набуває ракета. Підвищуючи ці характеристики, досягають значних швидкостей руху ракети. Тому видатний російський вчений К. Е. Цюлковський (1857-1935) стверджував, що єдино можливим засобом для виходу в космос і переміщення у безповітряному просторі є ракета.

7. Принцип відносності Галілея. Межі застосування класичної механіки

З'ясуємо, відносно якої системи відліку справджуються закони механіки. І. Ньютон припускав, що існують абсолютно нерухомий простір та абсолютно незалежний плин часу, відносно яких справджуються ці закони.

Проте ще Г. Галілей поставив принципове для науки питання: чи можна спостереженнями в системі, що перебуває в рівномірному і прямолінійному русі, виявити цей інерціальний рух та визначити його швидкість?

У 1632 р. Г. Галілей з погляду спостерігача, який знаходиться у закритій каюті корабля, довів, що ніякими механічними дослідженнями неможливо з'ясувати, перебуває система в стані спокою чи в стані рівномірного і прямолінійного руху. Адже відомо, що на пароплавах та у вагонах, коли вони рухаються рівномірно і прямолінійно, досліди відбуваються так само, як тоді, коли вони перебувають у стані спокою.

Усе це привело Г. Галілея, а після нього й І. Ньютона до висновку, що ту чи іншу систему можна лише умовно вважати за нерухому, оскільки її інерціальний рух не можна виявити. У цьому суть **механічного принципу відносності Галілея**. Уже тоді І. Ньютон висловив думку: може виявитися, що насправді не існує тіла в абсолютному спокої, відносно якого можна було б вивчати рухи інших тіл.

Розглянемо докладніше дві системи відліку S і S_1 (рис. 23), одна з яких (S_1) переміщується рівномірно та прямолінійно відносно нерухомої системи S зі швидкістю V у напрямі осі Ox . Нехай у момент часу $t = 0$ обидві системи координат суміщалися. З переходом

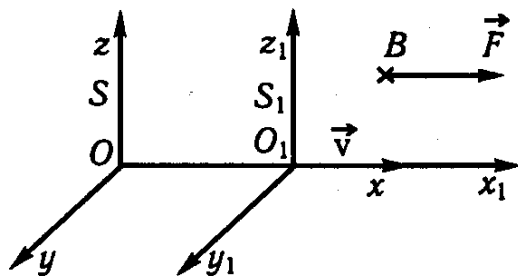


Рис. 23

від системи S_1 до S галілеєві формули перетворення координат матимуть такий вигляд:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + vt, & y &= y_1, & z &= z_1, \\ & & & & t &= t_1 \end{aligned} \quad (1)$$

Узявши похідні координат точки за часом, дістанемо співвідношення проєкцій швидкостей і правило додавання швидкостей переносного та відносного рухів точки:

$$\dot{x} = \dot{x}_1 + v, \quad \dot{y} = \dot{y}_1, \quad \dot{z} = \dot{z}_1, \quad \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{v} \quad (2)$$

Припустимо, що в системі S у напрямі осі Ox на тіло B діє сила F . Порівняємо її з діючою силою в системі S_1 :

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{d^2 (x_1 + vt)}{dt^2} = m \frac{d^2 x_1}{dt_1^2} = F_1$$

Значення діючої сили (і прискорення руху точки) в системі S_1 , що переміщується рівномірно та прямолінійно відносно системи S , таке саме, як у системі S .

У системі S_1 справджуватимуться також закон інерції та третій закон механіки.

Закони механіки Ньютона не справджуватимуться у системі S_1 , якщо вона рухатиметься відносно системи S із прискоренням.

Астрономічні спостереження й обчислення показують, що закони механіки Ньютона справджуються у системах координат, пов'язаних із Сонцем або іншими зірками всесвіту (Сонце рівномірно прямолінійно переміщується зі швидкістю 18 км/с в напрямі сузір'я Геркулеса). На коротких проміжках часу закони з достатньою практичною точністю справджуються у системі, пов'язаній із Землею. Проте, оскільки Земля рухається навколо Сонця та обертається навколо своєї осі, її не можна віднести до інерціальних систем; але для малих проміжків часу і багатьох практичних задач з механіки її можна вважати інерціальною. Наприклад, Земля за 30 хв руху навколо Сонця проходить дугу близько $1'$, тому на цій ділянці її рух можна вважати прямолінійним та рівномірним (більше впливатиме на відхилення від законів механіки добове обертання Землі навколо своєї осі). Названі системи можна віднести до інерціальних. Інерціальною буде також усяка інша система, яка відносно іншої інерціальної перебуватиме у прямолінійному і рівномірному русі.

Класична механіка, що ґрунтується на законах Ньютона, з достатньою точністю справджується лише для макроскопічних тіл і тільки тоді, коли швидкості їхніх рухів малі порівняно зі швидкістю світла ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

У теорії відносності розкрито сучасні погляди щодо понять простору й часу. Якщо у класичній фізиці простір і час уявлялися абсолютними та незалежними від тіл і їхніх рухів, то в теорії відносності простір і час - категорії, які залежать від тіл та їхніх рухів. У зв'язку з цим формули перетворення координат Галілея (1) втрачають зміст і поступаються місцем формулам Лоренца.

Класична механіка виявилася непридатною для опису властивостей мікроструктур та поведінки елементарних частинок - фотонів, електронів, протонів, нейтронів тощо. У

характеристиках мікрочастинок проявляються деякі абсолютні міри - певна маса, електричний заряд, момент імпульсу, стала Планка і т. д. Нерідко в рухомих елементарних частинок виразно проявляються хвильові властивості (хвиля де Бройля $\lambda = \frac{h}{mv}$). У таких випадках переміщення елементарних частинок ближче до поширення хвилі, ніж до руху частинок по траєкторії. Такі характеристики матеріальної точки, як її координати та траєкторія руху, якими оперує класична механіка, втрачають зміст, коли розглядати елементарні частинки з їхніми хвильовими властивостями. Особливості мікросвіту описуються квантовою механікою.

8. Рух тіл зі змінною масою. Рівняння Мещерського

Класичним прикладом руху тіла змінної маси вважається рух важкого ланцюга, який спадає вниз із горизонтальної підставки так, що весь час падають усе нові його ланки. Як приклад руху тіл із змінною масою можна назвати рух автоцистерни, коли з неї поливають вулицю, рух аеростата, коли з нього викидають баласт, рух ракет, реактивних літаків і реактивних снарядів, розмотування рулону паперу або намотування ниток; змінною є маса Сонця - вона збільшується через захоплення космічного пилу та зменшується унаслідок випромінювання.

Знайдемо основне рівняння динаміки поступального руху тіла змінної маси. Виходячи з другого закону Ньютона, згідно з яким усяка зміна імпульсу системи є результатом дії зовнішньої сили,

$$d\vec{K} = \vec{F} dt. \quad (1)$$

Для конкретності під рухом тіла змінної маси розумітимемо найпростіший рух ракети, а також вважатимемо, що її маса змінюється неперервно, без стрибків і вихід продуктів згоряння не змінює центра маси ракети. Іншими словами, під ракетою уявлятимемо матеріальну точку змінної маси.

Нехай у момент часу t маса ракети була m , а її швидкість відносно нерухомої системи координат - $\vec{v}$; нехай за час dt з ракети вилітають продукти згоряння масою dm зі швидкістю $\vec{\omega}$.

У результаті за час dt маса ракети буде $m - dm$, а її швидкість становитиме $\vec{v} + d\vec{v}$.

Застосуємо до ракети рівність (1). Зважаючи, що в момент часу t імпульс ракети дорівнював $m\vec{v}$, а в момент $(t + dt)$ він буде $(m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm\vec{\omega}$, дістаємо

$$(m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm\vec{\omega} - m\vec{v} = \vec{F} dt. \quad (2)$$

Якщо у виразі (2) перемножити члени в дужках і знехтувати членом другого порядку малості $dmd\vec{v}$, то матимемо

$$md\vec{v} + (\vec{\omega} - \vec{v})dm = \vec{F} dt. \quad (3)$$

Якщо останню рівність поділити на dt та врахувати, що для ракети $\frac{dm}{dt} < 0$, оскільки у польоті маса її зменшується, і перегрупувати члени, то дістанемо таке рівняння:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + (\vec{\omega} - \vec{v}) \frac{dm}{dt}. \quad (4)$$

Це рівняння, виведене російським ученим І. В. Мещерським (1859-1935), є основним рівнянням динаміки поступального руху тіла змінної маси. У його правій частині $\vec{F}$ - рівнодійна зовнішніх сил, що діють на ракету (сили тяжіння та опору середовища); другий член виражає реактивну силу, що діє на ракету з боку газів, які вилітають. Отже, за рівнянням Мещерського добуток маси ракети на її прискорення у будь-який момент часу дорівнює

векторній сумі рівнодійної зовнішніх сил і реактивної сили, що діють на ракету; $\vec{\omega} - \vec{v} = \vec{u}$ — швидкість вилітання газів відносно ракети.

Увівши нове позначення цієї швидкості в рівняння (4), дістанемо

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u} \frac{dm}{dt}. \quad (5)$$

При $\frac{dm}{dt} = 0$ рівняння (5) переходить у вираз другого закону Ньютона в разі сталої маси.

Приклади розв'язування задач за темою

Приклад 1. Горизонтальний струмінь води з поперечним перерізом 4 см^2 б'є зі швидкістю 5 м/с у вертикальну стіну і вільно стікає по ній вниз. Визначити горизонтальну силу, з якою струмінь діє на стіну.

Розв'язання. Застосуємо до деякої незначної частини струменя другий закон механіки у вигляді

$$\frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = F.$$

Урахувавши, що $\Delta(mv) = 0 - mv$ і що за час Δt у стінку вдаряється частина струменя завдовжки $v\Delta t$ та масою $m = \rho S v \Delta t$, знайдемо

$$\Delta(mv) = -\rho S v^2 \Delta t.$$

Підставивши зміну імпульсу у вираз сили, дістанемо

$$F = -\frac{\rho S v^2 \Delta t}{\Delta t} = -\rho S v^2; \quad F = -4 \text{ Н.}$$

Знак «мінус» указує на те, що сила дії стінки на струмінь напрямлена проти її швидкості. Такою самою за значенням буде сила дії струменя на стінку в горизонтальному напрямі.

Приклад 2. На рис. 20 у спрощеному вигляді зображено центрифугу. У пробірці нерухомої центрифуги налили рідину густиною $1,1 \text{ г/см}^3$ до висоти 6 см . Під час обертання центрифуги пробірки займають майже горизонтальне положення. Визначити тиск рідини на дно пробірок під час обертання центрифуги, якщо дно пробірки рухається на відстані 10 см від осі обертання і частота обертання центрифуги дорівнює 20 с^{-1} .

Розв'язання. Розглянемо рідину у пробірці в обертальній системі координат. За цих умов на частинки рідини діють відцентрові сили, які передаються до дна посудини та створюють сумарний тиск на дно.

Виділимо елемент рідини dm на відстані x від осі обертання і знайдемо відцентрову силу, що діє на нього,

$$dF = dm \omega^2 x.$$

Оскільки $dm = \rho S dx$, маємо $dF = \rho S \omega^2 x dx$, а створюваний цією силою тиск

$$dp = \frac{dF}{S} = \rho \omega^2 x dx.$$

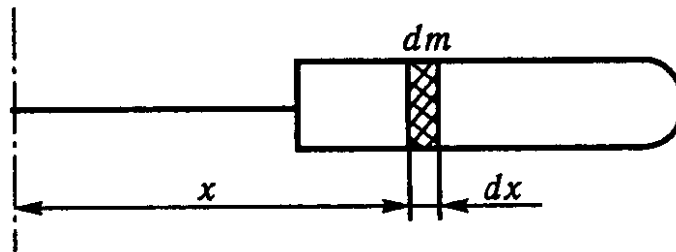


Рис. 20

Сумарний тиск стовпчика рідини на дно пробірки становитиме

$$p = \int_0^{10} \rho \omega^2 x dx; \quad p = 0,72 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Цей вираз тиску відрізняється від виразу тиску стовпчика рідини у полі тяжіння.

Приклад 3. Через нерухомий блок перекинуто легку нитку, до кінців якої підвішено два важки однакової маси $m_1 = m_2 = m$. На лівий важок покладено переважок масою Δm . Знайти силу тиску переважка на важок і прискорення системи. Масою та тертям блока знехтувати.

Розв'язання. Визначаємо діючі сили на кожне з тіл (рис. 21). На важок масою m_1 діють сила тяжіння $m_1 \vec{g}$, сила натягу нитки $\vec{T}_1$, сила тиску переважка $\vec{P}$; на важок масою m_2 – сила тяжіння $m_2 \vec{g}$ і сила натягу нитки $\vec{T}_2$; на переважок – сила тяжіння $\Delta m \vec{g}$ та сила реакції $\vec{Q}$ з боку основного важка.

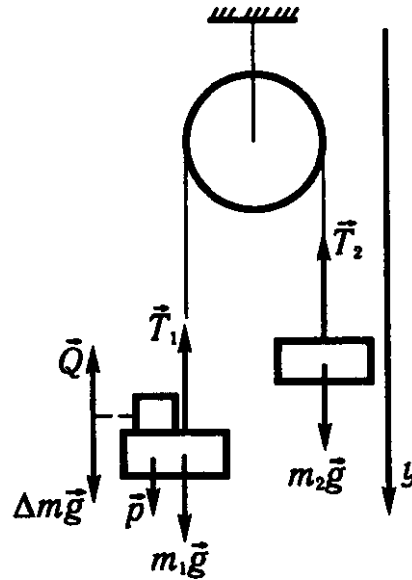


Рис. 21

Записуємо для кожного з тіл рівняння динаміки:

$$m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{P};$$

$$m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2;$$

$$\Delta m \vec{a}_1 = \Delta m \vec{g} + \vec{Q}.$$

Вибираємо вісь y і переходимо від векторної форми запису рівнянь до скалярної (у проєкціях). При цьому враховуємо, що $m_1 = m_2 = m$, $a_1 = a_2 = a$, $T_1 = T_2 = T$, оскільки масою та тертям блока і масою нитки нехтуємо; $Q = -P$ за третім законом Ньютона. Тоді

$$ma = mg - T + P;$$

$$-ma = mg - T;$$

$$\Delta ma = \Delta mg - Q.$$

Розв'язавши систему рівнянь, дістанемо

$$a = \frac{\Delta mg}{2m + \Delta m};$$

далі знайдемо

$$P = \frac{2m\Delta m}{2m + \Delta m} g.$$

Домашнє завдання:

Вивчити матеріал лекції. Опрацювати приклади розв'язування задач за темою

Самостійне вивчення: Опрацювати матеріал теми сили пружних деформацій. Сили тертя. Сили тяжіння. Гравітаційне поле. Неінерціальні системи відліку і сили інерції. Еквівалентність сил інерції та сил тяжіння.

За підручником «Фізика» за ред. Дмитрівоєї В.Ф §20-22

Лекція № 4

Енергія. Робота і потужність. Кінетична і потенціальна енергія. Закони збереження енергії. Енергетична характеристика поля тяжіння. Потенціал.

1. Енергія

Енергія і робота мають важливе значення в житті людини, тому займають особливе місце в науці. Завдяки енергії виконується робота в усіх сферах виробництва. Енергоозброєність людини визначає загальний технічний розвиток суспільства.

З'ясуємо відношення енергії до матерії та руху. Невід'ємною властивістю матерії є рух. Однак рухи матерії різняться за формою (якістю). Наприклад, різні за формою механічний, тепловий, електричний та інші рухи.

У різних явищах природи можна спостерігати передавання руху і перетворення однієї форми руху на іншу. Цей процес завжди відбувається принаймні між двома тілами, з яких одне втрачає певну частку руху однієї якості (наприклад, механічного руху), а інше дістає відповідне додання руху іншої якості (наприклад, теплового або електричного руху). Істотно, що в таких перетвореннях руху змінюється лише якість, а кількісна міра руху, яку називають *енергією*, залишається тією самою. У цьому полягає сутність закону перетворення і збереження енергії.

Енергія - це міра руху в явищах перетворення однієї форми руху на іншу. Відповідно до різних форм руху розрізняють енергію механічну, внутрішню, електричну тощо.

Механічна енергія є мірою механічного руху. Оскільки стан механічного руху системи в будь-який момент часу визначений, якщо відомо взаємне положення і швидкості тіл, в механіці розрізняють два види енергії: *кінетичну*, що залежить від швидкості тіл, та *потенціальну*, яка залежить від взаємного положення тіл.

Кінетичну енергію визначають за формулою.

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (1)$$

Її запропонував німецький вчений Г. Л. Ф. Гельмгольц (1821—1894), дослідивши процес перетворення механічного руху на внутрішній тепловий рух. Залежно від характеру взаємодії тіл системи формула для обчислення потенціальної енергії має різний вигляд. Зокрема, по-різному виражаються потенціальна енергія тіла, піднятого над Землею, енергія розтягнутої пружини, енергія стиснутого газу.

Зауважимо, що Р. Декарт, вивчаючи поведінку тіл при пружних зіткненнях, дійшов висновку, що механічний рух потрібно характеризувати добутком маси на швидкість. Пізніше німецький вчений Г. В. Лейбніц (1646-1716) за даними перетворення механічного руху на тепловий довів, що мірою механічного руху має бути величина, пропорційна добутку маси на квадрат швидкості тіла. Цю величину він називав «жива сила». З того часу в науці розпочалася дискусія про те, що треба вважати мірою механічного руху. Вона закінчилася тільки в середині XIX ст. з відкриттям закону збереження енергії.

Між імпульсом та енергією як об'єктивними мірами руху існує зв'язок:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m},$$

ним широко користуються у теоретичних аналізах фізичних явищ. Примітним при цьому є те, що два тіла з однаковим імпульсом взагалі можуть мати різні значення енергії та, навпаки, при однаковій енергії - різні значення імпульсів:

$$E_{k1} = \frac{p^2}{2m_1}; \quad E_{k2} = \frac{p^2}{2m_2}.$$

Енергія й імпульс - істотно різні міри механічного руху.

2. Робота і потужність

Поняття роботи у фізиці почали використовувати на початку XIX ст., зокрема ним оперував французький вчений Ж. В. Понселе у праці «Вступ до технічної механіки» (1829). Однак тільки у 1853 р. шотландський вчений У. Дж. М. Ренкін (1820-1872) пов'язав це поняття з перетворенням енергії. Насправді, коли взаємодіють два тіла, то відбуваються передавання і перетворення однієї форми руху на іншу. **Процеси, в яких змінюється форма руху, а отже, енергія перетворюється з одного виду на інший, називають *роботою*.**

Робота як фізична величина визначає кількість енергії, перетвореної з одного виду на інший. Співвідношення між роботою та енергією можна записати так:

$$A = -\Delta E. \quad (1)$$

Тому кажуть, що тіло внаслідок утрати своєї енергії ΔE виконало роботу A . Навпаки, якщо робота виконується над системою (тілом), то вона є мірою збільшення енергії системи. За цією залежністю далі визначатимемо енергію тіла, піднятого над Землею, пружно деформованого тіла та ін.

Знайдемо роботу, виконану завдяки кінетичній енергії протягом деякого малого проміжку часу Δt . Робота дорівнюватиме зміні енергії:

$$\Delta A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (2)$$

Цей вираз можна записати інакше:

$$\Delta A = m \frac{(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)}{2}$$

а якщо його помножити і поділити на час Δt , то матимемо

$$\Delta A = m \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \frac{v_2 + v_1}{2} \Delta t.$$

звідки дістанемо

$$\Delta A = F \Delta r. \quad (3)$$

Як бачимо, робота також чисельно дорівнює добутку сили на переміщення тіла в напрямі діючої сили. Тому користуються поняттям ***робота сили***.

Роботою сили $\vec{F}$, яка діє на матеріальну точку, називають фізичну величину, що дорівнює скалярному добутку вектора діючої сили на вектор переміщення точки $d\vec{r}$:

$$dA = (\vec{F} d\vec{r}) = F dr \cos(\vec{F}, ^\wedge d\vec{r}). \quad (4)$$

Інакше записують $dA = F \cos \alpha ds$ (рис. 46).

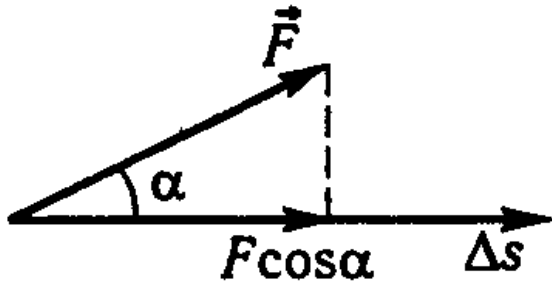


Рис. 46

Робота - скалярна величина; залежно від кута між напрямками діючої сили та переміщення вона може бути додатною, від'ємною і дорівнювати нулю. Нулю дорівнює робота сили, перпендикулярної до напрямку переміщення, зокрема робота доцентрової сили, робота сили тяжіння під час руху тіла в горизонтальній площині та ін.

Здебільшого, наприклад під час рівномірного піднімання тіла, робота діючої сили зводиться до подолання сили тяжіння; у разі рівномірного руху тіла на горизонтальній поверхні - до подолання сили

тертя, у виробничій сфері - до подолання опору ґрунту, опору різних матеріалів при обробленні тощо. Тому під роботою на практиці розуміють процес подолання опору при переміщеннях тіл.

Виражають роботу в СІ у джоулях. *Джоуль* - це робота сили в 1 Н на шляху в 1 м за умови, що напрям дії сили і напрям переміщення збігаються. В аналітичному запису

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м} = 1(\text{кг} \cdot \text{м}^2)/\text{с}^2.$$

Раніше ми розглянули спосіб обчислення роботи сталої сили при прямолінійному переміщенні тіла. Роботу змінної сили, або добуток змінної проекції сили на напрям переміщення, визначають за формулою (4), яку можна застосувати лише для нескінченно малого переміщення $d\vec{r}$.

Роботу на всьому шляху знайдемо як суму робіт на всіх елементарних переміщеннях, на

які поділено шлях. Ця операція зводиться до обчислення інтеграла

$$A = \int_s F \cos \alpha \, ds. \quad (5)$$

Поряд з аналітичним широко використовують графічний спосіб визначення роботи. Відклавши по осі Oy проекцію діючої сили $F \cos \alpha$, а по осі Ox - пройдений тілом шлях s (рис. 47), дістанемо графічну залежність між ними у вигляді кривої AB . Звідси випливає, що робота на елементарному переміщенні

$$dA = F \cos \alpha \, ds$$

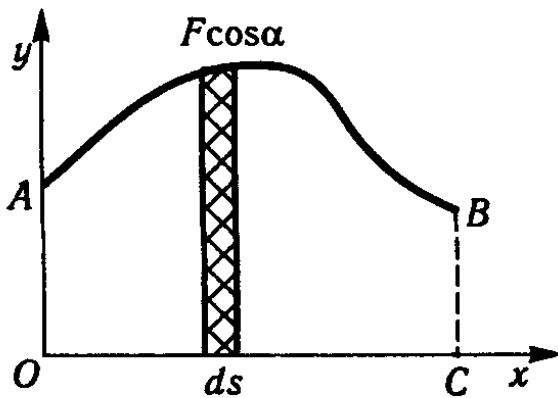


Рис. 47

дорівнює площі заштрихованої смужки, а робота на всьому шляху - площі фігури $OABC$. Наприклад, якщо обчислити площу фігури за допомогою індикатора (індикатор - прилад, що фіксує зміни будь-якого параметра чи об'єкта у формі, найзручніший для безпосереднього сприйняття людиною), то можна визначити роботу газу в циліндрі теплової машини.

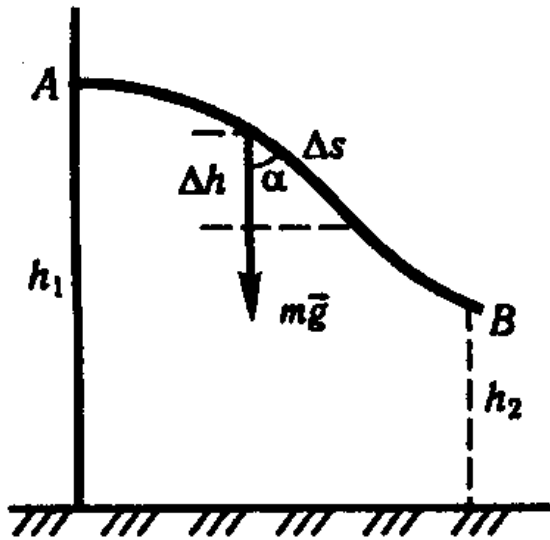


Рис. 48

Розглянемо важливий приклад роботи сили тяжіння при русі тіла по деякій кривій AB (рис. 48).

Поділимо весь шлях на такі малі частини, щоб їх можна було вважати прямолінійними. Робота на одній з них

$$\Delta A = mg \Delta s \cos \alpha = mg \Delta h.$$

Роботу на всьому шляху знайдемо як суму робіт на окремих його частинах:

$$A = \sum mg \Delta h = mg \sum \Delta h = mg (h_1 - h_2). \quad (6)$$

Як бачимо, робота сили тяжіння (або робота проти сили тяжіння) для тіла, що переміщується у полі тяжіння, не залежить від форми траєкторії, а

залежить лише від різниці висот її початкової та кінцевої точок прикладання. Якби тіло у полі тяжіння описало замкнену траєкторію, то сумарна робота сили тяжіння дорівнювала б нулю: позитивна робота тіла, коли воно опускається, компенсується негативною роботою тіла, коли воно піднімається.

Сили, робота яких не залежить від траєкторії руху тіла, а залежить лише від початкового і кінцевого його положень, називаються потенціальними. Такими є, наприклад, сили всесвітнього тяжіння, сили пружності, електростатичні сили. Поля, в яких виявляється дія таких сил, називаються **потенціальними**. Система тіл називається **консервативною**, якщо в ній внутрішні сили взаємодії потенціальні, а зовнішні сили, що діють на ці тіла, - **стаціонарні та потенціальні**.

Для виконання роботи використовують різні машини - механічні, теплові, електричні. їх роботоздатність характеризується потужністю.

Потужність чисельно дорівнює роботі, яку машина може виконати за одиницю часу. Розрізняють середню потужність

$$\bar{N} = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (7)$$

та миттєву, тобто потужність у певний момент часу:

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Потужністю також характеризують прилади, що споживають або перетворюють певну енергію (наприклад, потужність електричної лампи, холодильника, вентилятора тощо).

Одиницею потужності в СІ є

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}.$$

Великі потужності у практиці вимірюють у кіло- і мегаватах:

$$1 \text{ кВт} = 10^3 \text{ Вт};$$

$$1 \text{ МВт} = 10^6 \text{ Вт}.$$

Для вимірювання потужності машин та пояснення їхньої роботи при різних навантаженнях користуються також виразом потужності через діючу силу і швидкість руху, а саме:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{(\vec{F} d\vec{r})}{dt} = (\vec{F} \vec{v}) = Fv \cos(\vec{F}, \vec{v}). \quad (8)$$

Отже, при заданій потужності машина може розвивати більшу силу тяги, коли швидкість менша, і навпаки. Тому транспортні машини зі збільшенням сили опору на шляху за допомогою коробки передач переходять на меншу швидкість.

Якщо врахувати, що сила опору повітря відносно літака у польоті та сила опору води під час руху корабля пропорційні квадрату швидкості, то за формулою (8) потужність їхніх двигунів має зростати пропорційно кубу швидкості. Це означає, що для збільшення швидкості літака або корабля у 2 рази потужність двигунів треба підвищити у 8 разів.

Наведемо приклади середніх потужностей:

Кінь	600 Вт
Трактор К-701	220 кВт
Автомобіль вантажний МАЗ-525	220 кВт
Тепловоз ТЕ-10 Л	2210 кВт
Літак Іл-18	11 800 кВт
Криголам «Арктика»	54 200 кВт

Для тягових машин розрізняють потужність двигунів і потужність на причіпному гаку, тобто потужність без тієї частини, що відбирається на переміщення самої машини. Наприклад, потужність двигуна трактора ДТ-80 - 59 кВт, а тягова потужність - 40 кВт.

3. Кінетична і потенціальна енергія

Кінетичною називають ту частину механічної енергії, яка залежить від швидкості руху тіл. Як зазначалося, кінетичну енергію матеріальної точки визначають за формулою

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (1)$$

Цю формулу можна вивести, дослідивши перетворення механічного руху на інші форми руху, наприклад на внутрішній, що відбувається унаслідок непружного удару тіл або їх гальмування. Кількість теплоти, яка виділяється в таких перетвореннях, пропорційна масі та квадрату швидкості тіла.

Потенціальною називають ту частину механічної енергії, яка залежить від взаємного розміщення частин системи і їх положення у зовнішньому силовому полі.

Потенціальну енергію визначатимемо за тією роботою, що виконується над системою, щоб перевести її з деякого нульового положення у заданий стан. Для прикладу визначимо потенціальну енергію тіла над Землею.

Якщо тіло рівномірно піднімається над Землею, то робота проти сили тяжіння дорівнює збільшенню потенціальної енергії системи тіло-Земля. Коли висота підняття незначна ($h \ll R_3$), силу тяжіння вважаємо сталою; тому можна записати

$$Ph = \Pi - \Pi_0,$$

де Π і Π_0 - потенціальна енергія тіла відповідно на висоті h та на поверхні Землі. Потенціальну енергію на поверхні Землі беруть за нульовий рівень ($\Pi = 0$); тоді у формулу потенціальної енергії тіла, що знаходиться на висоті h , має такий вигляд:

$$\Pi = mgh. \quad (2)$$

За цією формулою потенціальна енергія тіла, опущеного у шахту, виражається від'ємним числом.

Потенціальну енергію тяжіння у загальному вигляді, тобто для будь-якої відстані тіла від Землі, знайдемо з виразу роботи проти змінної сили тяжіння.

Елементарна робота, яку виконує тіло, що віддаляється від Землі,

$$dA = \gamma \frac{mM}{r^2} dr.$$

Робота тіла, що переміщується з точки A в точку B , які знаходяться від центра Землі на відстанях відповідно r_1 і r_2 ,

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mM}{r^2} dr = -\gamma \frac{mM}{r_2} + \gamma \frac{mM}{r_1} = \Pi_2 - \Pi_1.$$

У загальному вигляді визначена робота дорівнює зміні потенціальної енергії сили тяжіння. Звідси знаходимо формулу для визначення потенціальної енергії тяжіння

$$\Pi = -\gamma \frac{mM}{r}. \quad (3)$$

Із формули (3) випливає, що потенціальна енергія сили тяжіння з віддаленням тіла від поверхні Землі збільшується. Із цим узгоджується також наближена формула для визначення енергії тіл, які перебувають поблизу Землі.

Формули (2) і (3) справедливі для різних початків відліку енергії, їх вибір суто умовний, оскільки практичне значення має не сама енергія, а її зміна. Формулу (2) можна вивести із загального виразу потенціальної енергії тяжіння (3). Для цього треба у (3) підставити $r = R + h$,

R - радіус Землі ($h \ll R$), і виконати такі перетворення:

$$\Pi = -\gamma \frac{mM}{R + h} = -\frac{\frac{1}{R} \gamma mM}{1 + \frac{h}{R}} = -\frac{1}{R} \gamma mM \left(1 - \frac{h}{R}\right),$$

звідки,

$$\Pi = -\gamma \frac{mM}{R} + mgh.$$

Узявши потенціальну енергію тіла на поверхні Землі (перший член суми) за нульовий рівень, дістанемо $\Pi = mgh$.

Визначимо потенціальну енергію пружнодеформованого тіла. Для здійснення деформації треба виконати роботу проти сили пружності. Ця робота буде мірою потенціальної енергії деформації. Розглянемо для прикладу роботу, потрібну для розтягу пружини (рис. 49).

Силу пружності за законом Гука визначають

$$F = -kx,$$

де k - коефіцієнт жорсткості пружини; x - її видовження. Тому елементарна робота, що виконується при будь-якому розтязі пружини на dx , становитиме

$$dA = Fdx = kx dx.$$

Уся робота, що виконується для розтягу пружини,

$$A = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

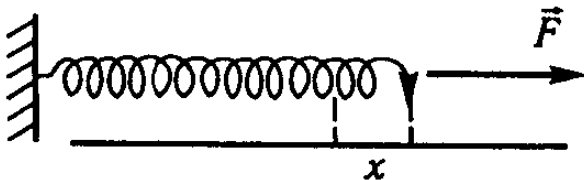


Рис. 49

Так виражається робота будь-якої деформації. Тому формулу для визначення потенціальної енергії пружної деформації запишемо так:

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}. \quad (4)$$

Розглянуті приклади обчислення механічної енергії системи дають можливість визначити загальну властивість енергії. З формули для визначення кінетичної енергії випливає, що її значення залежить від швидкості, але не від того, як тіло набуло її. Значення потенціальної енергії тяжіння, у свою чергу, залежить лише від взаємного положення тіл системи, але не від того, як тіла переводилися в нього. Те саме можна сказати стосовно енергії пружної деформації. Отже, енергія системи визначається лише її наявним станом і не залежить від попередньої історії. Іншими словами, енергія є функцією стану системи.

4. Закон збереження енергії

Вище були розглянуті системи, в яких робота проти сил тяжіння або сил пружності підвищувала потенціальну енергію.

Відомо, що коли не діють зовнішні сили і, зокрема, сили тертя, тіла під дією згаданих потенціальних сил приводяться у прискорений рух. Завдяки роботі цих сил кінетична енергія тіл збільшується:

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \quad (1)$$

и одночасно відповідно зменшується потенціальна енергія системи

$$A = \Pi_0 - \Pi. \quad (2)$$

Дослідження таких перетворень механічної енергії показує, що на скільки зменшується потенціальна енергія системи, на стільки збільшується її кінетична енергія, і навпаки. Так, кулька, падаючи з висоти h , дістає таку кінетичну енергію, завдяки якій знову може піднятися на висоту h ; рухома кулька, натикаючись на пружину, стискає її такою мірою, що пружина здатна відновити швидкість кульки. Отже, можна записати рівність

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Pi_0 - \Pi,$$

звідки

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = \frac{mv_0^2}{2} + \Pi_0,$$

тобто **при всяких змінах в ізольованій консервативній системі її повна енергія залишається незмінною**. Так можна сформулювати **закон збереження енергії** в механічних явищах.

Доведено, що закон збереження енергії справджується в усіх явищах природи. Відкриттям цього закону було завершено вчення про зв'язок і взаємне перетворення різних форм руху матерії; на цій основі сформувався саме поняття енергії.

Закон збереження енергії є окремим виразом загального закону збереження матерії та руху, сформульованого М. В. Ломоносовим (1711-1765) у 1748 р. Тоді геніальний російський вчений писав: «Усі переміни, що в натурі трапляються, такого суть стану, що скільки чого в одного тіла віднімається, стільки додається до іншого. Цей загальний природний закон стосується і самих правил руху: бо тіло, яке рухає своєю силою інше, стільки ж її у себе втрачає, скільки надає іншому, яке від нього рух дістає».

Низький рівень техніки та панування в науці механістичних поглядів на явища природи в епоху Ломоносова не дали йому можливості розкрити якісні перетворення різних форм руху матерії.

У цій частині закон збереження був всебічно розкритий пізніше. Якщо М. В. Ломоносов лише обґрунтував єдність механічного руху і теплоти, спростовуючи теорію теплецю, то Б. Румфорд (1753— 1814) у 1798 р. довів перетворення механічного руху на теплоту, а використання теплових машин незаперечно свідчило про перетворення теплоти на механічний рух. У 1800 р. італійський вчений А. Вольта (1745-1827) винайшов елемент, що ілюстрував зв'язок хімічних та електричних явищ, а в 1831 р. англійський фізик М. Фарадей (1791-1867) відкрив явище електромагнітної індукції - механічний рух провідника в магнітному полі породжував електричний струм і т. д. Дослідні дані взаємного перетворення різних форм руху матерії узагальнив німецький вчений Ю. Р. Майєр (1814-1878) у 1842-1845 рр. у законі збереження і перетворення енергії.

Відкриття цього закону було одним з найвидатніших досягнень людства на шляху пізнання природи й удосконалення виробничої діяльності. Цим законом було спростовано безплідну ідею створення вічного двигуна першого роду (*perpetuum mobile I*), тобто двигуна, який, раз приведений у дію, безупинно зберігав би рух і виконував роботу без споживання енергії ззовні. Закон спрямовував зусилля учених та винахідників на використання різних джерел енергії для виконання роботи. На основі закону збереження і перетворення енергії проєктуються та споруджуються сучасні двигуни й енергетичні станції.

5. Застосування законів збереження до центрального удару куль

Явище удару є короткочасною взаємодією тіл, що супроводиться зміною їх руху. Воно у свій час привертало увагу Г. Галілея, Х. Гюйгенса, І. Ньютона та інших учених. У граничних випадках розрізняють непружний і пружний удари тіл.

Непружний удар куль. Розглянемо ідеально непружний удар куль, тобто такий, після якого обидві кулі залишаються zdeформованими і рухаються як одне ціле. Нехай кулі з масами m_1 та m_2 рухаються в одному напрямі зі швидкостями v_1 і v_2 (рис. 50). Знайдемо їх спільну швидкість $\vec{u}$ після удару.

Застосовуючи закон збереження імпульсу, дістаємо

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u},$$

звідки

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Зрозуміло, що на деформацію тіл витрачено деяку енергію, яка визначається виразом

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} \\ &= \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \end{aligned}$$

Ця частина кінетичної енергії тіл перетворилася на внутрішню енергію тіл (наприклад, на їх нагрівання від удару).

Пружний удар куль. Під час ідеально пружного удару в першій стадії тіла деформуються, а їхні швидкості вирівнюються; у другій стадії тіла повністю відновлюють свою форму. Завдяки силам пружності, що відновлюють форму, швидкості тіл стають різними. Знайдемо їх.

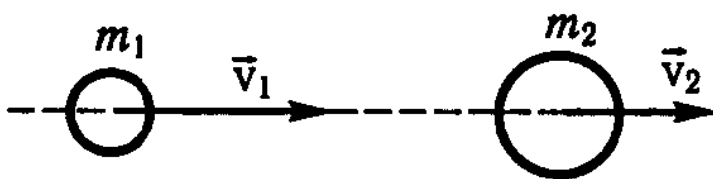


Рис. 50

Нехай кулі з масами m_1 та m_2 до удару мали швидкості відповідно $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ (див. рис. 50), а після удару вони стали відповідно $\vec{u}_1$ та $\vec{u}_2$; розглядається центральний удар, тобто швидкості до і після удару паралельні тій самій прямій.

Оскільки від удару на тілах не залишається будь-яких слідів, сумарна кінетична енергія їх залишається незмінною:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (1)$$

За законом збереження імпульсу системи

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (2)$$

Якщо в одержаних рівняннях зібрати зліва і справа члени з однаковими масами, а потім перше рівняння поділити на друге, то дістанемо систему двох лінійних рівнянь, з якої легко знайти швидкості куль після удару. Вони відповідно становитимуть

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Розглянемо окремі випадки удару:

- якщо $m_1 = m_2$, то $u_1 = v_2$, $u_2 = v_1$, тобто тіла, що вдарилися, обмінюються швидкостями. Це добре спостерігається на більярдних кулях. Найкращим сповільнювачем швидкої частинки, очевидно, буде друга частинка такої самої маси, але з малою швидкістю. Так, наприклад, в атомній фізиці вирішуються питання щодо сповільнення нейтронів тощо;

- якщо $m_2 \rightarrow \infty$, $v_2 = 0$, то $u_1 = -v_1$; $u_2 = 0$, тобто перше тіло відскакує від другого з тією самою швидкістю. Наприклад, м'яч, ударившись об підлогу, змінює напрям руху на протилежний тощо.

6. Енергетична характеристика поля тяжіння. Потенціал.

У попередніх параграфах ми констатували потенціальний характер сил тяжіння і визначали в загальному вигляді роботу цих сил у центральному полі в разі переміщення тіла масою m . Наведемо вираз цієї роботи в дещо іншому вигляді, а саме:

$$A = -\gamma \frac{mM}{r_2} + \gamma \frac{mM}{r_1} = m \left(-\gamma \frac{M}{r_2} + \gamma \frac{M}{r_1} \right),$$

де в дужках виділено величини, що стосуються характеристик поля тяжіння. Зважаючи на їх значення як для визначення роботи, так і для оцінювання поля, ці величини позначають відповідно φ_2 , φ_1 і називають **потенціалами гравітаційного поля**. Отже, можна записати

$$\varphi = -\gamma \frac{M}{r},$$

а робота сил тяжіння між двома точками поля

$$A = m(\varphi_1 - \varphi_2).$$

За останнім виразом можна розкрити фізичний зміст потенціалу. Якщо припустити, що $r_2 \rightarrow \infty$, то

$$\varphi_1 = \frac{A_\infty}{m}$$

Потенціал у заданій точці дорівнює роботі, яку виконує сила тяжіння під час переміщення тіла одиничної маси із заданої точки на нескінченність (ця робота від'ємна,

оскільки кут між силою і переміщенням дорівнює 180° ; іншими словами, тому що для цього має бути залучена зовнішня сила).

Потенціал є енергетичною характеристикою поля в кожній точці. На нескінченності енергія тіла точкової маси m дорівнює нулю, а під час переміщення у точку r_1 сила поля виконує роботу і при цьому тіло набуває кінетичної енергії.

Зазначимо, що вибір нульового значення потенціалу має умовний характер, оскільки в усіх розрахунках практичне значення має лише різниця потенціалів, а не їхні абсолютні значення. Наприклад, в однорідному полі поблизу поверхні Землі за нульовий потенціал беруть точки її поверхні (при цьому з підняттям над поверхнею значення потенціалу рівномірно зростає).

Оскільки потенціал є скалярною функцією, у полі тяжіння, обумовленому системою матеріальних точок, потенціал у кожній точці визначається сумою потенціалів полів окремих тіл. Якщо матеріальна точка масою m потрапляє у поле тяжіння інших тіл, то її потенціальна енергія

$$\Pi = m\varphi,$$

де φ - потенціал поля у місці розміщення унесеного тіла.

Як було вже зазначено, силовою характеристикою гравітаційного поля в кожній точці є вектор напруженості $\vec{G}$, який характеризує енергетичну властивість поля - потенціал. Між цими величинами є певний зв'язок і його можна навести, скориставшись рівністю виразів роботи переміщення матеріальної точки m на тій самій ділянці поля.

Коли припустити, що тіло переміщується на ділянці Δn у напрямі лінії напруженості, то виконана робота становитиме

$$Gm\Delta n = -m\Delta\varphi,$$

звідки

$$\vec{G} = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta n}\vec{n}_0$$

де $\vec{n}_0$ - одиничний вектор, напрямлений у бік найбільшого зростання потенціалу.

У векторному аналізі вказаний зв'язок виражають за допомогою векторної функції - градієнта потенціала:

$$\vec{G} = -\text{grad}\varphi$$

у прямокутній системі координат вектор $\text{grad}\varphi$ виражається так:

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

Для графічного відображення гравітаційного поля, крім ліній напруженості, користуються також екіпотенціальними поверхнями, тобто поверхнями, всі точки яких мають однаковий потенціал. У полі точкового тіла це сферичні поверхні, спільним центром яких є задане тіло; в однорідному полі це плоскі поверхні, перпендикулярні до ліній напруженості (оскільки робота під час переміщення тіла по екіпотенціальній поверхні дорівнює нулю). Такий аналіз екіпотенціальних поверхонь і ліній напруженості характерний для всіх полів тяжіння.

Домашнє завдання:

Вивчити матеріал лекції.

Самостійне вивчення:

Тема 1.2.5: «Тверде тіло як система матеріальних точок. Центр мас. Поступальний та обертальний рухи твердого тіла. Момент сил. Основне рівняння динаміки обертального руху. Момент інерції. Момент імпульсу. Закони збереження моменту імпульсу. Теорема Штейнера».

Вивчити матеріал лекції. За підручником: «Загальний курс фізики»

І. М. Кучерука Том I. § 3.6, 4.1 – 4.6

Тема 1.2.6 Гідроаеростатика. Закон Паскаля. Вплив тяжіння на тиск у рідинах і газах. Закон Архімеда. Стаціонарний потік рідини і газів. Рівняння Бернуллі. В'язкість рідин і газів. Ламінарний і турбулентний потік

Вивчити матеріал лекції. За підручником: «Загальний курс фізики»

І. М. Кучерука Том I. § 7.1 – 7.5

Тема 1.3.1 Основні положення молекулярно-кінетичної теорії (МКТ). Броунівський рух. Дифузія. Сила і енергія міжмолекулярної взаємодії. Особливості теплового руху молекул газів, рідин і твердих тіл. Статистичний і термодинамічний методи дослідження.

Матеріал до самостійного вивчення додається

1. Основні положення молекулярно-кінетичної теорії та її підтвердження на основі дослідів

Речовина може перебувати в трьох агрегатних станах: твердому, рідкому і газоподібному. Молекулярна фізика — розділ фізики, у якому вивчаються фізичні властивості тіл у різних агрегатних станах на основі їх молекулярної будови.

Молекулярно-кінетична теорія зародилася в XIX-му столітті з метою пояснити будову і властивості речовини на основі уявлень про те, що речовина складається з найдрібніших частинок — молекул, які безперервно рухаються й взаємодіють одна з одною. Особливих успіхів ця теорія досягла під час пояснення властивостей газів.

Ø Молекулярно-кінетичною теорією називають вчення про будову і властивості речовини на основі уявлень про існування атомів і молекул як найменших частинок хімічних речовин.

В основі МКТ лежать три основні положення:

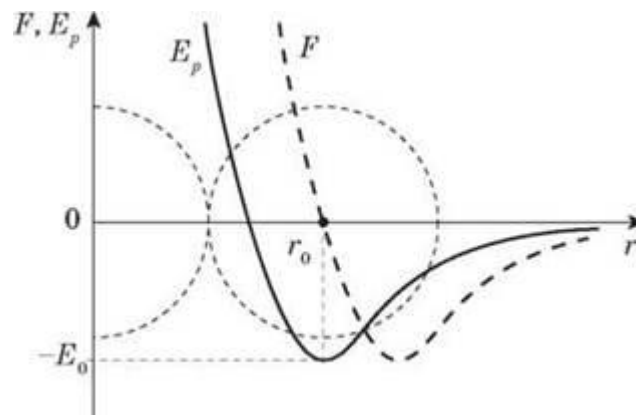
1) всі речовини утворені з найдрібніших частинок — молекул, які самі складаються з атомів. Молекули й атоми являють собою електрично нейтральні частинки. За певних умов молекули й атоми можуть набувати додаткового електричного заряду та перетворюватися на позитивні або негативні іони;

2) атоми й молекули перебувають у безперервному хаотичному русі;

3) частинки взаємодіють одна з одною силами, що мають електричну природу.

Найяскравішим експериментальним підтвердженням уявлень про молекулярно-кінетичну теорію (безладний рух атомів і молекул) є броунівський рух. Це тепловий рух найдрібніших мікроскопічних частинок, зважених у рідині або газі. Воно було відкрито англійським ботаніком Р. Броуном у 1827 р. Броунівські частинки рухаються під впливом безладних ударів молекул. Через хаотичний тепловий рух молекул ці удари ніколи не врівноважують одна одну. У результаті швидкість броунівської частинки безладно змінюється за модулем і напрямом, а її траєкторія утворює складну зигзагоподібну криву.

Теорія броунівського руху була створена А. Ейнштейном у 1905 р. Експериментально теорія Ейнштейна була підтверджена в дослідях французького фізика Ж. Перрена, проведених у 1908-1911 рр. Постійний хаотичний рух молекул речовини проявляється також в іншому явищі, яке легко спостерігати, — дифузії. Дифузією називається явище проникнення двох або кількох дотичних речовин одна в одну. Найшвидше процес протікає в газі, якщо він неоднорідний за складом. Дифузія призводить до утворення однорідної суміші, незалежно від густини компонентів. Дифузія й броунівський рух — споріднені явища. Взаємопроникнення дотичних речовин одна в одну й безладний рух найдрібніших частинок, зважених у рідині або газі, відбуваються внаслідок хаотичного теплового руху молекул. Переконатися в існуванні молекул і оцінити їх розмір можна досить просто. Помістимо маленьку крапельку олії на поверхню води. Масляна пляма буде розтікатися по поверхні води, але площа масляної плівки не може перевищувати певного значення. Можна припустити, що максимальна площа плівки відповідає масляному шару товщиною в одну молекулу. Наприклад, крапелька оливкової олії об'ємом 1 мм³ розтікається площею не більшою 1 м². Звідси випливає, що розмір молекули олії порядку 10⁻⁹ м. Багато дослідів свідчать про наявність сил міжмолекулярної взаємодії. Сили, що діють між двома молекулами, залежать від відстані між ними. Молекули є складними просторовими структурами, що містять як позитивні, так і негативні заряди. Якщо відстань між молекулами досить велика, то переважають сили міжмолекулярного притягнення. На малих відстанях переважають сили відштовхування. Залежності результуючої сили F і потенційної енергії взаємодії між молекулами від відстані між їх центрами якісно зображені на рисунку.



На певній відстані $r = r_0$ сила взаємодії зводиться до нуля. Цю відстань умовно можна прийняти за діаметр молекули.

2. Основне завдання МКТ

Параметри газу, пов'язані з індивідуальними характеристиками складових його молекул, називаються мікроскопічними параметрами (маси молекул, їх швидкості, концентрація). Параметри, які характеризують стан макроскопічних тіл без урахування їх молекулярної будови, називаються макроскопічними параметрами (об'єм, тиск, температура).

Ø Співвідношення між макроскопічними параметрами — об'ємом і тиском — називається рівнянням стану.

Основне завдання молекулярно-кінетичної теорії: встановити зв'язок між макроскопічними і мікроскопічними параметрами речовини й, виходячи з цього, знайти рівняння стану даної речовини. Наприклад, знаючи масу молекул, їх середні швидкості й концентрацію, можна знайти об'єм, тиск і температуру даної маси газу, а також визначити тиск газу, якщо відомі його об'єм і температура.

3. Маса та розміри молекул

Маси окремих молекул і атомів дуже малі. Наприклад, в 1 г води міститься $3,7 \cdot 10^{22}$ молекул. Отже, маса однієї молекули води (H_2O) дорівнює:

$$m_{H_2O} = \frac{1}{3,7 \cdot 10^{22}} \approx 2,7 \cdot 10^{-23} \text{ (г)}.$$

Маси такого ж порядку мають молекули інших речовин (крім величезних молекул органічних речовин). Наприклад, білки мають маси, у сотні тисяч разів більші за маси окремих атомів. Але все одно їх маси в макроскопічних масштабах (грамах і кілограмах) надзвичайно малі.

Приблизну оцінку розмірів молекул можна отримати з дослідів, проведених німецьким фізиком В. Рентгеном і англійським фізиком Д. Релея. Якщо крапнути на поверхню води крапельку олії, то крапля розпливеться, утворюючи тонку плівку товщиною всього лише в одну молекулу. Товщину цього шару неважко визначити й тим самим оцінити розміри молекули олії. Об'єм V ($0,001 \text{ см}^3$) шару олії дорівнює добутку площі його поверхні S (6000 см^2) на товщину шару d , тобто $V = Sd$. Отже, розмір молекули олії дорівнює:

$$d = \frac{0,001 \text{ см}^3}{6000 \text{ см}^2} \approx 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ см}.$$

На даний момент існує ряд методів, що дозволяють визначити розміри молекул і атомів. Наприклад, лінійні розміри молекул кисню складають $3 \cdot 10^{-10}$ м, води — приблизно $2,6 \cdot 10^{-10}$ м. Таким чином, характерною довжиною в світі молекул є розмір 10^{-10} м. Корисно не тільки запам'ятати цей параметр (10^{-10} м), а й образно уявити його собі. Це допоможе нам увійти в світ молекул. Легко перевірити: якщо молекулу води збільшити до розмірів яблука, то саме яблуко стане розміром з земну кулю.

Лекція № 5

Тема: Ідеальний газ. Рівняння стану ідеального газу. Молярна газова стала .Стала Боцмана. Ізопроееси в газах. Рівняння стану реального газу. Ізотерми реальних газів. Критична точка. Фазові переходи I роду. Критичний стан речовини. Перегрита рідина та пересичена пара.

Мета: ввести поняття ідеального газу; охарактеризувати рівняння стану ідеального газу, ізопроееси в газах; навчити пояснювати ізотерми реальних газів; описувати фазові переходи I роду та критичний стан речовини.

Обладнання: прилад для перевірки газових законів.

Хід заняття.

I. Організаційний момент.

- а) готовність групи до заняття;
- б) психоемоційний настрій;
- в) перевірка присутніх.

II. Мотивація навчальної діяльності студентів.

- а) повідомлення теми та мети заняття;
- б) Залежно від конкретного завдання у фізиці користуються різними спрощеними модельними поняттями. У механіці такими модельними поняттями є: матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, абсолютно пружне тіло, абсолютно непружне тіло. У молекулярній фізиці для описування процесів в газах використовують модель ідеального газу.

III. Виклад нового матеріалу.

План

1. Ідеальний газ.
2. Рівняння стану ідеального газу.
3. Молярна газова стала .Стала Больцмана .
4. Ізопроееси в газах.
5. Рівняння стану реального газу.
6. Ізотерми реальних газів. Критична точка.
7. Фазові переходи I роду.
8. Критичний стан речовини. Перегріта рідина та пересичена пара.

IV. Узагальнення та систематизація знань.

Розв'язати задачу № 2.2. із збірника задач за ред. І.П.Гаркуші.

V. Підведення підсумків заняття.

VI. Домашнє завдання: вивчити матеріал лекції; за підручником

«Загальний курс фізики», т.1, за ред. Кучерука І.М.
опрацювати матеріал §14.6-14.7; 17.2-17.3 або за підручником
«Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф. - §41; 46-48;
розв'язати задачу №4 на с.181 підр. «Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф.

Зміст лекції додається.

Ідеальним називають такий газ, для якого можна знехтувати розмірами молекул та силами молекулярної взаємодії. Молекули в такому газі співударяються за законом співударяння пружних куль. Реальні гази поведуть себе як ідеальний тоді, коли середня відстань між молекулами у багато разів перевищує їхні розміри, тобто коли розрідження досить велике. Газ може бути в різних станах, тобто деяка маса газу має об'єм V , тиск p і температуру T . Величини V, p, T , що характеризують стан газу, називаються термодинамічними параметрами. Процеси, що відбуваються при сталому значенні одного з параметрів стану (T, V або p) з певною сталою масою газу, називаються *ізопроцесами*.

Ізотермічний процес - процес, що відбувається при сталій температурі ($T = \text{const}$). За законом Бойля-Маріотта, тиск даної маси газу при сталій температурі обернено пропорційний об'єму газу. Отже,

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1} \quad \text{або} \quad p_1 V_1 = p_2 V_2 = \text{const.}$$

Криву залежності тиску газу від його об'єму при сталій температурі називають *ізотермою*. Графік залежності між параметрами газу при $T = \text{const}$ (Рис. 24).

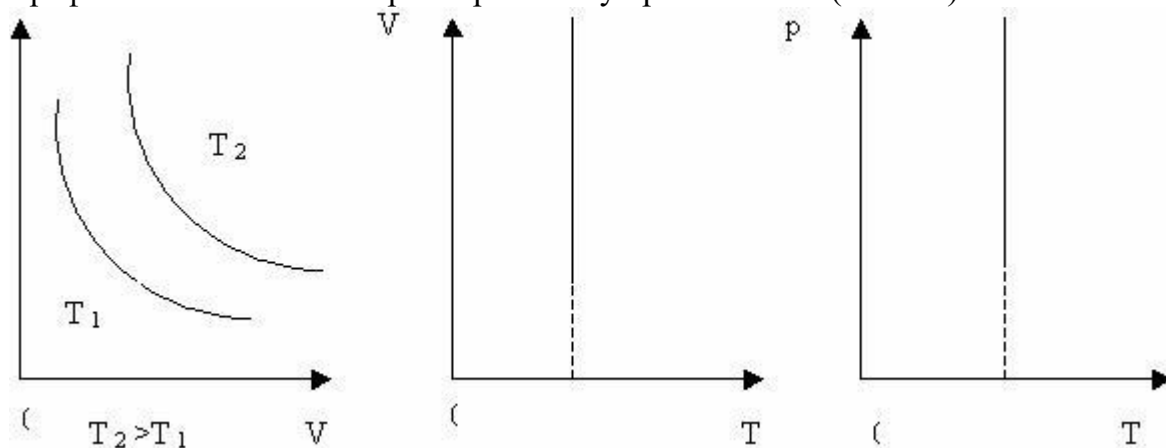


Рисунок 22

Ізобаричний процес – процес, який відбувається при сталому тиску ($p = \text{const}$).

Виходячи із закону Гей-Люссака, відносна зміна об'єму даної маси газу в ізобарному процесі прямо-пропорційна зміні температури t .

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \alpha t \quad \text{або} \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} = \text{const}$$

Отже, $V = V_0(1 + \alpha t)$ або $V = V_0 \frac{T}{T_0}$

V_0 - об'єм газу при $t = 0^\circ\text{C}$, V - його об'єм при температурі t , α – термічний коефіцієнт об'ємного розширення. Для всіх газів:

$$\alpha = \frac{1}{273} \text{ K}^{-1}$$

Криву залежності об'єму газу від температури при сталому тиску називають *ізобарою*. Графік залежності між параметрами при $p = \text{const}$ (Рис. 25).

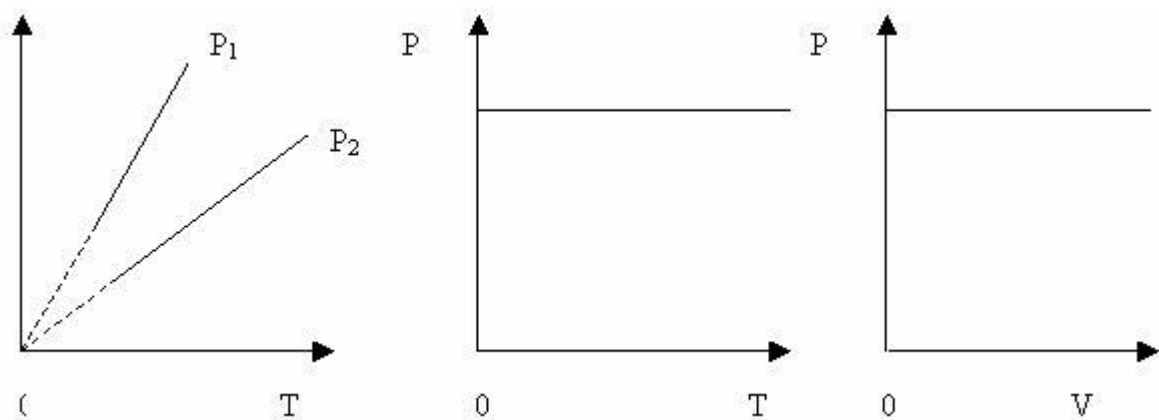


Рисунок 23

Вищому тиску відповідає нижча ізобара. Штрихи означають, що закон Гей-Люссака в області низьких температур не застосовується. Об'єм не може перетворитися в нуль при температурі -273°C .

Ізохоричний процес – це процес, який відбувається при сталому об'ємі ($V = \text{const}$). Виходячи із закону Шарля, тиск даної маси газу при сталому об'ємі пропорційний його абсолютній температурі:

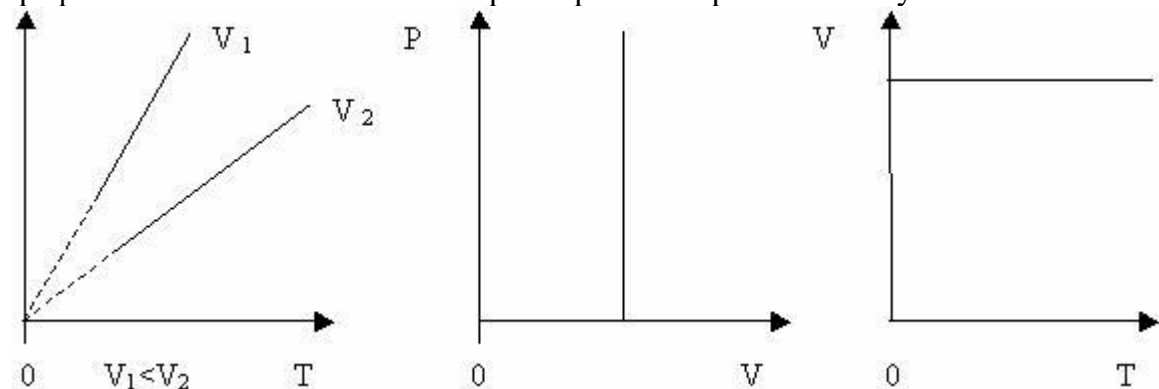
$$p = p_0 (1 + jt)$$

p_0 - тиск при 0°C , j – термічний коефіцієнт тиску газу.

$$j = \frac{1}{273} \text{ K}^{-1} \quad \text{або} \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} = \text{const}$$

Залежність тиску газу від температури при сталому об'ємі графічно зображається прямою, яка називається *ізохорою*. Меншому об'ємі відповідає ізохора, що лежить вище.

Графік залежності між параметрами при сталому об'ємі $V = \text{const}$ (Рис.



26).

Рисунок 14

Виходячи з закону Шарля, можна знайти температуру, при якій тиск газу буде дорівнювати нулеві.

$$p = p_0(1 + jt), \quad 0 = p_0(1 + jt)$$

Оскільки $p_0 \neq 0$, то $1 + jt = 0$ або $t = -273^{\circ}\text{C}$.

Температуру $-273,16^{\circ}\text{C}$ називають абсолютним нулем температур.

Англійський вчений У.Томсон запропонував абсолютну шкалу температур. За абсолютний нуль було прийнято температуру $t = -273^{\circ}\text{C}$

(точніше $t_0 = -273,16^{\circ}\text{C}$) абсолютна температура T пов'язана з температурою t за шкалою Цельсія таким співвідношенням:

$$T = t + 273^{\circ}\text{C}$$

В шкалі Цельсія за 0°C прийнято температуру танення льоду при нормальному тискові, за 100°C – температуру кипіння води при нормальному тискові.

В шкалі Кельвіна за 0 прийнято температуру, при наближенні до якої швидкість поступального руху молекул ідеального газу прямує до нуля, а 1 кельвін відповідає $1/100$ інтервалу температур між температурами танення льоду і кипіння води за нормального тиску.

За шкалою Фаренгейта:

$$t_F = 32 + \frac{t^{\circ}\text{C}}{5} \cdot 9$$

Основна одиниця температури в СІ є кельвін – $[T] = \text{K}$.

Змінюючи всі три параметра p , V і T газу і користуючись газовими законами можна отримати рівняння Клапейрона.

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \text{const}$$

Добуток тиску даної маси газу на об'єм, поділений на абсолютну температуру, є величиною сталою.

При $t = 0^{\circ}\text{C}$, $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$ один моль будь-якого газу має об'єм $V_0 = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. Підставивши ці дані в закон Клапейрона, отримуємо значення константи, яка є однакою для будь-якого 1 моля газу. Її називають молярною універсальною газовою сталою.

$$R = \frac{p_0 V_0}{T} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 22,4 \cdot 10^{-3}}{273} = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}$$

А для одного моля газу тепер можна записати:

$$p_0 V_0 = RT$$

Цей вираз називають рівнянням Менделєєва – Клапейрона.

А для будь-якої маси газу рівняння Менделєєва – Клапейрона матиме вигляд:

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

Якщо в об'ємі V знаходиться суміш газів, які не реагують один з одним, то використавши рівняння Менделєєва – Клапейрона, визначимо тиск:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \dots + \frac{m_n}{M_n} \right) \cdot \frac{RT}{V}$$

де m_i , M_i – маса і молярна маса i – го газу. Закон Дж. Дальтона:

«Тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків газів, з яких складається дана суміш».

Парціальним тиском називається тиск, який був би створений за даних умов (T, V) окремо одним газом з суміші.

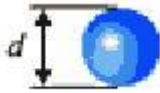
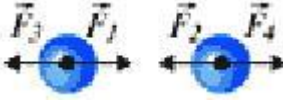
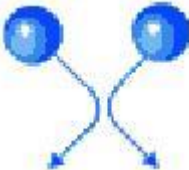
· Реальні гази

· Рівняння стану реального газу (рівняння Ван-дер-Ваальса)

· *Ізотерма реального газу*

Реальні гази. На практиці досить часто доводиться мати справу із реальними газами – наприклад, стиснутими газами в повітряних гальмах, відбійних молотках, компресорах тощо. Досліджені нами властивості газів стосуються ідеального газу – газу, для якого власний об’єм молекул (атомів) і взаємодія між ними не впливають на досліджувані явища. Більшість реальних газів, як уже зазначалось при кімнатній температурі й нормальному атмосферному тиску за своїми властивостями близькі до ідеальних. Проте з підвищенням тиску реальні гази поведуть себе по іншому порівняно з ідеальним, зокрема при стисканні, коли суттєво проявляють себе сили міжмолекулярної взаємодії. Щоб описати властивості реальних газів, потрібні інші рівняння, інша модель, ближча за властивостями до реального газу.

Рівняння стану реального газу (рівняння Ван-дер-Ваальса). Задовільною моделлю реального газу, є така, в якій молекули газу мають власний об’єм, їх можна вважати абсолютно пружними кулями між якими діють сили притягання, сили відштовхування проявляють себе у моменти зіткнень.

Ідеальний газ	Молекули сприймаються як матеріальні точки  $d=0$	Нехтуються сили взаємодії між молекулами 	Співудари між молекулами вважаються абсолютно пружними 
Реальний газ	Враховується власний розмір молекул  $d \neq 0$	Враховуються сили взаємодії між молекулами  $F \neq 0$	Характер співударів між молекулами залежить від конкретних умов 

На підставі такої моделі голландський фізик Ван-дер-Ваальс запропонував у 1873 р. рівняння стану реального газу. Слід зазначити, що для описання поведінки реальних газів розроблена значна кількість рівнянь. Рівняння Ван-дер-Ваальса є досить простим, але досить точним. Це рівняння Ван-дер-Ваальс отримав із рівняння Менделєєва-Клапейрона, ввівши поправки на розмір молекул і їх взаємодію.

У рівняння Менделєєва-Клапейрона входить об'єм газу, який відповідає об'єму тієї посудини, у якій знаходиться газ. Тобто молекули газу можуть рухатись у всьому наданому їм об'ємі. У реальному газі це не так. Наявність власного об'єму молекул і сил відштовхування зменшують фактичний об'єм, у якому вони можуть вільно рухатись. Об'єм, який може займати газ буде на деяку величину b меншим, її називають *поправкою на об'єм молекул*.

Теоретичні обчислення показують, що ця поправка у 4 рази більша від сумарного власного об'єму молекул газу. Це зумовлено тим, що сили відштовхування не дають можливості наблизитись молекулами впритул, а лише на відстань, що приблизно дорівнює діаметру молекули.

Дія сил притягання між молекулами призводить до появи у газі додаткового тиску, який називається *молекулярним* або *внутрішнім тиском*. У результаті притягання молекул газ ніби стискує сам себе. І хоч він не фіксується манометром, його слід додавати до виміряного значення. Цей тиск пропорційний квадрату густини газу $\rho \propto \rho^2$. Ввівши коефіцієнт пропорційності a (*поправка на притягання молекул*), який залежить від виду

газу, молекулярний тиск становить:

$$p_i = \frac{av^2}{V^2}$$

Підставляючи відповідні поправки до рівняння стану ідеального газу, отримуємо *рівняння стану реального газу (рівняння Ван-дер-Ваальса)*:

$$\left(p + \frac{av^2}{V^2}\right)(V - vb) = \nu RT$$

де a і b – сталі Ван-дер-Ваальса, які визначаються експериментально і мають різні значення для різних газів.

Рівняння Ван-дер-Ваальса добре описує поведінку реальних газів, проте воно теж не зовсім точне, особливо при низьких температурах (коли гази дуже густі).

- Порівняння дослідної та експериментальної ізотерм
- Зрідження газів
- Критичні параметри

Рівняння Ван дер Ваальса — модельне рівняння стану неідеального газу.

$$\left(P + \frac{N^2 a}{V^2}\right)(V - Nb) = Nk_B T$$

де P — тиск, V — об'єм, N — число молекул, T — температура, k_B — стала Больцмана, а та b — характерні для кожного реального газу сталі, які будуть визначені нижче.

Рівняння ван дер Ваальса описує збільшення тиску при зменшенні об'єму розріджених газів, перенасичену пару, перегріту рідину, різке зменшення стисливості в рідкій фазі. Рівняння ван дер Ваальса визначає також критичну температуру, вище якої газ не зріджується при жодному тиску. Фактично рівняння Ван дер Ваальса описує різницю між станом реального та ідеального газів. Поправки a і b мають більше значення при високих тисках газів. Наприклад, для азоту при тиску порядку 80 атм розрахунки проведені за рівняннями ідеального та реального газів різняться приблизно на 5%, а при тиску порядку 400 атм різниця складає вже 100%.

Зміст

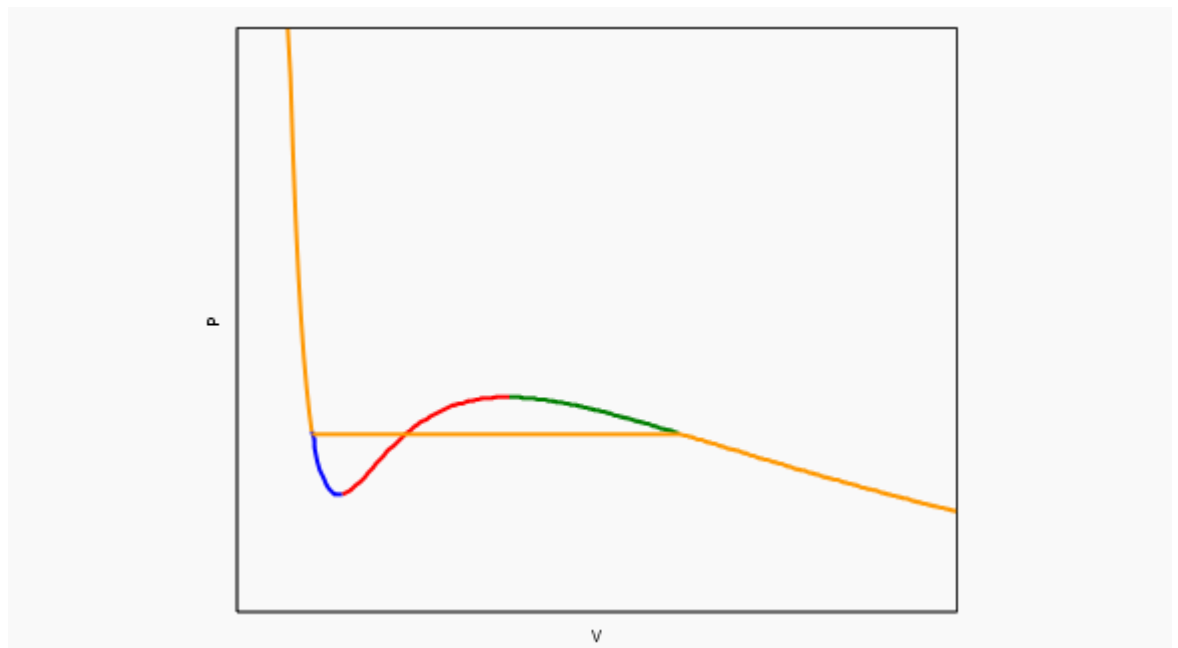
Фізична природа параметрів

Рівняння ван дер Ваальса описує газ, молекули якого взаємодіють між собою. Потенціальна енергія взаємодії між двома молекулами задається функцією $U(r)$, де r — відстань між молекулами. Молекули притягаються на великих відстанях і відштовхуються, підходячи близько одна до одної. Притягування зумовлене ван дер Ваальсовими силами, а відштовхування — принципом Паулі.

Нехай $2r_0$ (подвійний радіус молекули) — відстань, починаючи з якої відштовхування змінюється притягуванням. Тоді

$$b = \frac{16\pi r_0^3}{3}$$
$$a = \pi \int_{2r_0}^{\infty} |U| r^2 dr$$

За своєю природою b — виключений об'єм, який виникає через неточковість розміру молекул. Параметр a описує притягування між молекулами на великій відстані.



На рисунку показана типова ізотерма для рівняння ван дер Ваальса. При великих об'ємах зі зменшенням об'єму тиск збільшується.

Проте на ізотермі є ділянка (позначена червоним) для якої тиск падає зі зменшенням об'єму. Така ситуація не фізична. Збільшення тиску при зменшенні об'єму є універсальним законом фізики. Ця ділянка кривої не відповідає реальним фізичним станам.

У реальних газах при таких об'ємах відбуваються розшарування на дві фази: рідину й насичену пару. Експерименти з реальними газами показують, що в цій (навіть дещо ширшій області) відбувається конденсація газу й тиск залишається сталим. Відповідні стани показані жовтою горизонтальною прямою.

На кривій ізотерми ван дер Ваальса існують ще дві ділянки (позначені блакитною й зеленою кривими). Ці ділянки відповідають метастабільним станам. Зелена ділянка кривої ван дер Ваальса відповідає **переохолодженому газу**, тобто стану, в якому конденсація ще не розпочалася, хоча стан (горизонтальна крива), у якому краплини рідини співіснують з газом, є найстабільнішим. Метастабільний стан переохолодженої рідини можна реалізувати експериментально. Він знайшов застосування в камерах Вільсона, які служать для детектування треків заряджених часток. Проте переохолодження рідини повинно відбуватися дуже поступово й обережно. Рідина легко переходить із переохолодженого стану в стабільний стан на горизонтальній кривій.

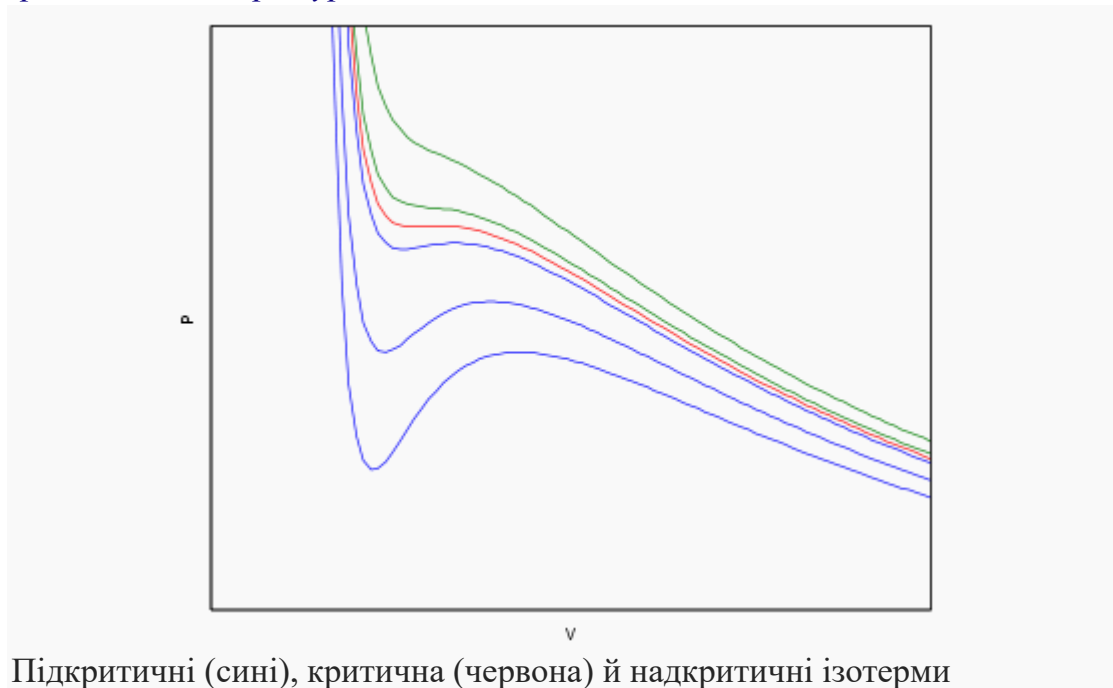
Аналогічно, блакитним кольором показана ділянка **перегрітої рідини**.

Перегріта рідина є метастабільним станом. Вона теж використовується в ядерній фізиці для детектування треків швидких частинок у бульбашкових

камерах. Швидка частинка іонізує атоми в перегрітій рідині, й вони стають центрами швидкого утворення бульбашок

Критична температура

Докладніше: Критична температура



Рівняння ван дер Ваальса з успіхом пояснює той факт, що при високій температурі реальні гази не зріджуються при жодному тиску.. На рисунку справа приведено кілька ізотерм для різних температур. Червоною лінією позначена ізотерма при критичній температурі. Сині лінії відповідають температурам, нижчим за критичну. На них спостерігаються ділянки з від'ємною стисливістю. Як зазначено раніше, ці ділянки нефізичні.

Насправді в реальних газах при даних умовах відбувається конденсація, тиск залишається сталим при зменшенні об'єму, міняється лише доля сконденсованого газу. Зелені лінії показують ізотерми для температур, які перевищують критичну. Вони не мають ділянок конденсації. При таких температурах гази не зріджуються.

Таблиця параметрів для реальних газів

Для опису властивостей реальних газів параметри рівняння ван дер Ваальса підбираються із експерименту.

Газ	a [(кПа·дм ⁶)/моль ²]	b [дм ³ /моль]
-----	---	-----------------------------

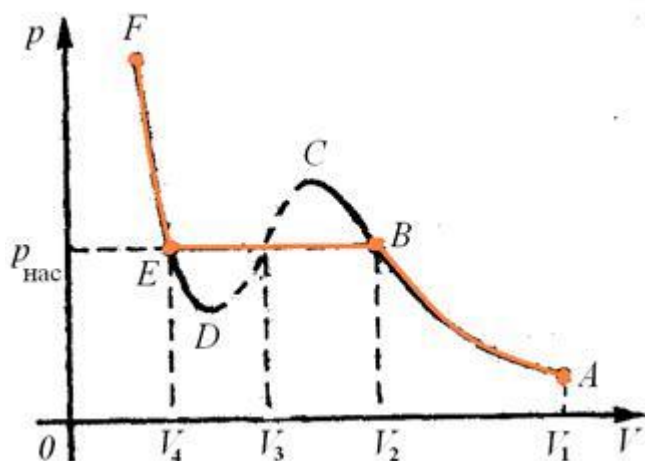
<u>Гелій</u> (He)	3,45	0,0237
<u>Неон</u> (Ne)	21,3	0,0171
<u>Аргон</u> (Ar)	136,3	0,0322
<u>Водень</u> (H ₂)	24,7	0,0266
<u>Азот</u> (N ₂)	140,8	0,0391
<u>Кисень</u> (O ₂)	137,8	0,0318
<u>Повітря</u> (80% N ₂ , 20% O ₂)	135,8	0,0364
<u>Вуглекислий газ</u> (CO ₂)	363,7	0,0427
<u>Вода</u> (H ₂ O)	557,29	0,031
<u>Хлор</u> (Cl ₂)	657,4	0,0562
<u>Аміак</u> (NH ₃)	422,4	0,0371
<u>Метан</u> (CH ₄)	225	0,0428

Порівняння дослідної та експериментальної ізотерм. У §13 ми зазначили, що теоретично побудована ізотерма реального газу є кубічною параболою (*мал. 26*), і щоб проаналізувати

фізичний зміст окремих ділянок побудованої ізотерми слід дослідити взаємні перетворення рідкого і газоподібного станів речовини.

При дослідженні ізотермічного стискання ненасиченої пари ми отримали графік переходу пари в рідину (мал.27). Такого ж вигляду набуває і графік ізотермічного стискання реального газу при низьких температурах.

Проведемо порівняння теоретично побудованої ізотерми та ізотерми, отриманої при зрідженні реального газу. Для цього накреслимо їх на одній координатній площині (мал. 31).



Мал. 31. Теоретична та експериментальна ізотерми

Як видно, ділянки AB обох ізотерм співпадають. На початку стискання тиск газу змінюється у відповідності із законом Бойля-Маріотта (ділянка AB). Отже реальний газ і ненасичена пара при невисоких тисках поводить себе однаково.

Ділянки EF також співпадають, що відповідає рідкому стану речовини.

Розбіжність між теоретичною і експериментальною ізотермами спостерігається на ділянці BE . Подальше стискання газу приводить до його насичення (т. B на графіку), після чого насичена пара починає конденсуватись (ділянка BE). Процес конденсації відбувається при сталому тиску (ділянка BE паралельна осі V). Теоретична ізотерма має згин $BCDE$. Спробуємо його пояснити.

Як видно тиск на ділянці BC більший від тиску насиченої пари. Експериментально це можна отримати, якщо пара буде перенасиченою. Як відомо, тиск перенасиченої пари більший за тиск насиченої пари при даній температурі (оскільки така пара не містить центрів конденсації).

Ділянка ED показує, що рідина перебуває під тиском меншим за тиск насиченої пари при даній температурі і не перетворюється у газоподібний стан (не кипить). Це можливо коли рідина є перегрітою (позбавлена центрів пароутворення).

Таким чином, ділянки AB та EF ізотерми Ван-дер-Ваальса відображають стійкі стани ненасиченої пари (газу) і рідини, а ділянки BC та ED – нестійкі стани перенасиченої пари та перегрітої рідини. Ці стани ще називають *метастабільними*. Достатньо лише пилінки, щоб речовина розпалась на дві фази: рідку і газоподібну.

Ділянка CD – відповідає абсолютно нестійкому стану речовини, в якому тиск мав би зменшуватись із зменшенням об'єму і зростати із його збільшенням. На досліді цей стан не спостерігається.

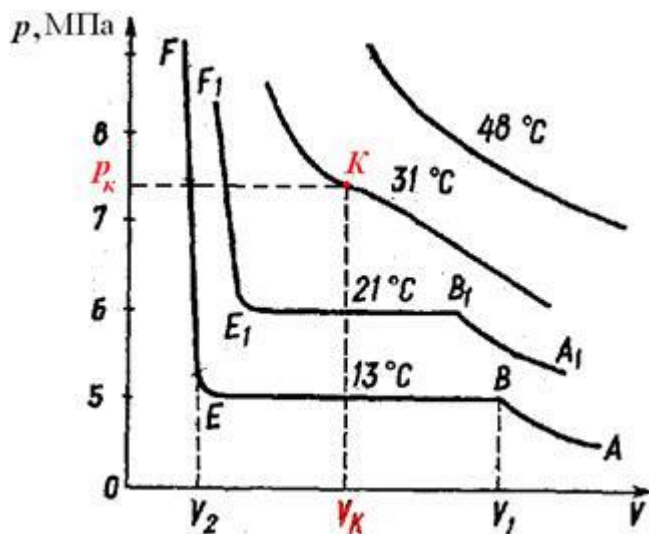
Проведене порівняння показує, що ділянка згину $BCDE$ ізотерми Ван-дер-Ваальса відповідає перехідному стану речовини з газоподібного стану у рідкий (і навпаки), при цьому передбачає наявність нестабільних станів.

Таким чином, рівняння Ван-дер-Ваальса застосовне як до газоподібного, так і до рідкого стану речовини.

Зрідження газів. Ненасичена пара і реальний газ однаково підпорядковуються рівнянню Ван-дер-Ваальса. Постає питання: чи можливо будь-який газ перевести у стан насичення, а потім у рідину так, як і ненасичену пару?

Ще у XVII ст.. вчені намагались зрідити гази шляхом їх стискання при низькій температурі. Першим газом, який вдалось зрідити, був аміак. Це зробив у 1792 р. голландський учений Ван-Марум, який при температурі 15°C досяг тиску газу $7,2$ атм (приблизно 730 кПа). У 1823 р. М.Фарадею вдалось зрідити хлор. Фундаментальними у цьому напрямку були роботи Д.І.Менделєєва та Ендрюса.

Учений Ендрюс докладно дослідив процес зрідження вуглекислого газу: помістивши газ у скляну трубку, він стискав його ізотермічно при різних температурах. За результатами досліді він побудував сімейство ізотерм (мал. 32).



Мал.32. Сімейство ізоTERM

Із аналізу ізоTERM Ендрюса видно, що якщо при температурі 13 °C і об'єму V_1 газ конденсувався під тиском 5 МПа, то при температурі 21 °C (за іншого значення об'єму) – під тиском 6 МПа.

Чим вище температура, тим меншою є горизонтальна ділянка BE конденсації. І при температурі 31 °C та тиску 7 МПа цей відрізок перетворюється в точку K . При температурах, вищих за критичну, газ не конденсувався. ІзоТЕРми у цьому випадку не мали горизонтальної ділянки і схожі на ізоТЕРми ідеального газу. На основі дослідів Ендрюс зробив висновок, що будь-який газ можна зрідити, якщо він перебуває при температурі нижчій за критичну. При температурі вищій за критичну - газ зрідити не можна, він залишається газом.

Критичні параметри. Проведені дослідження довели, що для кожної речовини існує свій критичний стан, який визначається критичною температурою, тиском і об'ємом.

Теоретично розрахувати критичні параметри газу можна розв'язавши рівняння Ван-дер-Ваальса. Як уже зазначалось це рівняння третього степеня відносно об'єму. Одному значенню тиску відповідає три значення об'єму. При критичному значенні температури всі три корені будуть рівні між собою. Розв'язавши рівняння для цього випадку, визначають критичні параметри газу, взятого у кількості 1 моля:

$$V_{M,c} = 3b, \quad p_c = \frac{a}{27b^2}, \quad T_c = \frac{8a}{27bR}.$$

Критична температура речовини дорівнює тій температурі при якій густина рідини і густина її насиченої пари стають однаковими.

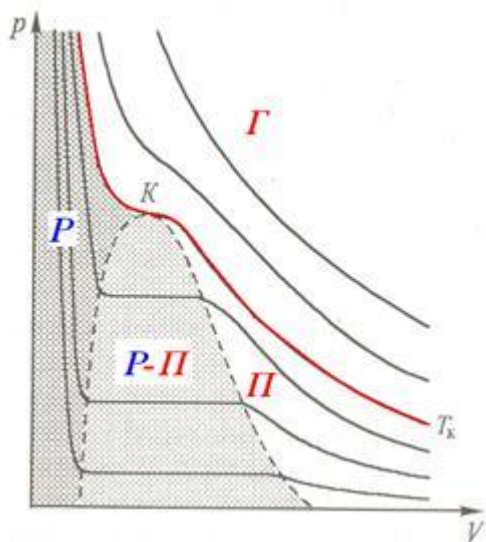
Критичний тиск дорівнює максимальному значенню тиску, який може мати насичена пара даної речовини.

Критичний об'єм є максимальним об'ємом, який може займати речовина у рідкому стані при критичній температурі і тискові.

Співвідношення між критичними параметрами газу набуває вигляду
$$p_c V_{f,c} = \frac{3}{8} RT_c$$
.

Кожен газ має свої критичні параметри, які можна розрахувати або визначити експериментально. Наприклад, для вуглекислого газу $T_k=304,1$ К, $p_c^*=7,4$ МПа, для кисню $T_k=154$ К, $p_c^*=5,07$ МПа, для водяної пари $T_k=647$ К, $p_c^*=22$ МПа.

За допомогою діаграми Ендрюса можна виділити області рівноважного стану речовини (мал. 33). Область P відповідає рідкому стану речовини, області Γ та Π відповідають газоподібному стану речовини, а в області $P-\Pi$ рідка речовина перебуває разом зі своєю парою (двофазна система).



Мал. 33. Області рівноважних станів речовини

Газ і пара різновиди газоподібного стану які відрізняються тим, що пару, яка має температуру нижчу за критичну можна перевести в рідину тільки завдяки збільшенню тиску. Газ має температуру, вищу за критичну і перевести його в рідину шляхом тільки стискання неможна. Його для цього сперш слід охолодити до температури, нижчої за критичну, а потім уже підвищуючи тиск перевести у стан насичення і зрідити.

Практичне використання зріджених газів.Найбільш широкого практичного використання зріджені гази набули у паливній галузі. Так, *зріджений нафтовий газ* має всі

якості повноцінного палива для двигунів внутрішнього згоряння. У всьому світі цей газ визнаний як дешеве, екологічно чисте паливо, по багатьом властивостям переважаючий бензин. Нафтовий газ – це суміш пропану, бутану й незначної кількості (близько 1%) неграничних вуглеводнів.

Природний газ – *метан* здатний різко зменшувати об'єм (в 600 разів) при його низькотемпературному зрідженні. Такий рідкий газ можна перевозити в спеціальних "бензобаках" при тиску не більше 6 атмосфер (тиск води у водопровідному крані). Продуктами повного згоряння метану є нешкідливі речовини - вуглекислий газ і вода. Саме тому ми не зазнаємо незручностей на наших кухнях, де іноді цілий день горять газові (метанові) плити. Густина природного метану в тисячу разів менша густини бензину.

Пропан-бутан - синтетичне паливо. Його одержують із нафти й сконденсованих нафтових попутних газів. За своїми властивостями зріджений пропан-бутан майже не відрізняється від стислого природного газу.

Особливе місце займає процес *зрідження повітря*, з якого потім добувають у рідкому стані майже всі гази, що входять до його складу. Це найдешевший спосіб добування *рідкого кисню*, який широко застосовується в суміші з ацетиленом для автогенного зварювання і різання металів, підземної газифікації вугілля, в металургії кольорових металів, для космічної техніки та ін. Рідкий азот використовується для синтезу аміаку, з якого виробляють мінеральні добрива. У медицині рідкий азот використовують для тривалого зберігання крові, кісткового мозку тощо. Він є кріохірургічним інструментом, за допомогою якого можна локально заморожувати окремі ділянки хворих органів, які потім видаляють.

Як відомо, залежно від зовнішніх умов одна й та сама речовина може перебувати у різних фазах, що відповідають різним агрегатним станам речовини. Речовина може переходити із однієї фази в іншу. Такий перехід називається фазовим переходом або фазовим перетворенням.

Фазовий перехід супроводжується низькою особливостей. Відповідно до характеру цих особливостей фазові переходи можуть бути першого та другого родів. Фазовий перехід, що характеризується однаковістю енергій Гіббса, співіснуючих у рівновазі фаз, і стрибкоподібним змінням ентропії та об'єму при переході речовини із однієї фази в іншу, називається переходом першого роду. Фазові переходи першого роду супроводжуються виділенням або поглинанням теплоти, яка називається прихованою теплотою фазового перетворення $Q_{\text{ф}}$ (температура залишається незмінною, незважаючи на підведення або відведення теплоти).

Прикладами фазових переходів першого роду є випарювання, конденсація, плавлення, кристалізація, сублімація, а також переходи твердих речовин із однієї

кристалічної модифікації в іншу (перехід сірого олова у біле, графіту у алмаз, моноклінної сірки у ромбічну тощо).

Крім фазових переходів першого роду, існують фазові переходи другого роду. Для них характерна не тільки однаковість енергій Гіббса, але й однаковість ентропій та об'ємів співіснуючих у рівновазі фаз, тобто відсутність теплового ефекту процесу та змінення об'єму при температурі перетворення. Зате мають місце стрибки фізичних величин, що виражені похідними ентропій та об'єму: теплоємність $C = T(dS/dT)_P$ та коефіцієнт термічного розширення

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dT} \right)_P$$

Прикладами фазових переходів другого роду є перехід речовини у надпровідниковий стан, перехід парамагнетика у ферромагнетик, перехід рідкого гелію у надтекучий стан.

Найбільший практичний інтерес становлять фазові переходи першого роду. Зупинимось докладніше на особливостях цих процесів.

Дайте відповіді на запитання

1. Який фізичний зміст мають ділянки теоретичної та експериментальної ізотерм?
2. Які процеси характеризують перехід рідин у газоподібний стан і навпаки?
3. Які параметри називаються критичними? Який їх фізичний зміст?
4. У чому полягає відмінність між парою та газом?
5. Наведіть приклади практичного використання зріджених газів.

Лекція № 6

Тема: «Тиск газу. Основне рівняння МКТ газів. Середня кінетична енергія поступального руху молекул. Молекулярно-кінетичне трактування абсолютної температури. Закон розподілу молекул газу за швидкостями (розподіл Максвелла). Газ у полі земного тяжіння. Барометрична формула».

Мета: пояснити виникнення тиску в газах, навчити виводити основне рівняння МКТ газів; пояснювати графік функції розподілу Максвелла та барометричну формулу; ввести поняття абсолютної температури.

Обладнання. Таблиці

Хід заняття.

I. Організаційний момент.

- а) готовність групи до заняття;
- б) психоемоційний настрій;
- в) перевірка присутніх.

II. Актуалізація опорних знань студентів.

Дати відповіді на запитання:

*Опишіть характер руху і взаємодії частинок у газі.

*Дати визначення тиску, записати формулу та вказати одиниці вимірювання тиску.

III. Виклад нового матеріалу.

План

1. Тиск газу.
2. Основне рівняння МКТ газів.
3. Середня кінетична енергія поступального руху молекул.
4. Молекулярно-кінетичне трактування абсолютної температури.
5. Закон розподілу молекул газу за швидкостями (розподіл Максвелла).
6. Газ у полі земного тяжіння. Барометрична формула.

IV. Узагальнення та систематизація знань.

Розв'язати задачі № № 2.15; 2.79; 2.95 із збірника задач за ред. І.П.Гаркуші.

V. Підведення підсумків заняття.

VI. Домашнє завдання: вивчити матеріал лекції; за підручником

«Загальний курс фізики», т.1, за ред. Кучерука І.М.

опрацювати матеріал §14.3; 14.9; 14.11 або за підручником

«Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф. - §40; 44-45; 49.

розв'язати задачу №10 на с.181 підр. «Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф.

Зміст лекції додається.

Самостійне вивчення: опрацювати матеріал теми «Внутрішня енергія. Перший закон термодинаміки» за підручником «Загальний курс фізики», т.1, за ред. Кучерука І.М. §16.1-16.2, або за підручником «Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф. - §41; 46-48; §51-54; 56.

Лекція № 6

1. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу

Основне завдання молекулярно-кінетичної теорії газу полягає в тому, щоб встановити співвідношення між тиском газу і його мікроскопічними параметрами — масою молекул, їх середньою швидкістю і концентрацією. Це співвідношення називається основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії газу.

Оскільки тиск газу на стінку посудини зумовлений ударами молекул, тиск газу пропорційний концентрації молекул n : чим більше молекул в одиниці об'єму, тим більше ударів молекул об стінку за одиницю часу. Кожна молекула при ударі об стінку передає їй імпульс, пропорційний імпульсу молекули, рівному по модулю $m_0 v$, де v — модуль швидкості молекули. Тому можна було б очікувати, що тиск пропорційний $nm_0 v$, де v — середнє значення модуля швидкості молекул.

Однак, насправді тиск пропорційний не першому, а другому ступеню швидкості, так як, чим більша швидкість молекули, тим частіше вона б'ється об стінку посудини. І дійсно, розрахунки показують, що основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу має вигляд:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \overline{v^2},$$

де m_0 — маса однієї молекули газу, n — концентрація молекул, $\overline{v^2}$ — середнє значення квадрата швидкості молекул.

Коефіцієнт $1/3$ зумовлений тривимірністю простору — тим, що під час хаотичного руху молекул всі три напрями рівноправні.

Отже, німецький фізик Р. Клаузиус з'ясував, що тиск ідеального газу прямо пропорційний концентрації частинок, маси частки й середнього значення квадрата швидкості частинки.

Отримане рівняння пов'язує макроскопічну величину — тиск, — що може бути виміряна манометром, з мікроскопічними величинами, що характеризують молекули, і є ніби містком між двома світами: макроскопічним і мікроскопічним.

2. Зв'язок тиску з середньою кінетичною енергією молекули

Якщо через $\bar{E}$ позначити середню кінетичну енергію поступального руху молекули $\bar{E} = \frac{m_0 \bar{v}^2}{2}$, то рівняння Клапейрона можна записати у вигляді:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \bar{v}^2 = \frac{2}{3} \frac{n m_0 \bar{v}^2}{2} = \frac{2}{3} n \bar{E}.$$

Тиск ідеального газу пропорційний добутку концентрації молекул на середню кінетичну енергію поступального руху молекули. У цій формулі концентрація часток характеризує число ударів молекул об поршень, а середня кінетична енергія молекул визначає інтенсивність одного удару.

Питання до учнів під час викладення нового матеріалу

1. Який механізм виникнення тиску газу, з точки зору молекулярно-кінетичної теорії будови речовини?
2. Чому можна вважати, що молекули в газі рухаються лише вздовж трьох взаємно перпендикулярних напрямів?
3. У яких шарах атмосфери повітря зі своїми властивостями наближається до ідеального газу: біля поверхні Землі чи на далеких висотах?

ЗАКРІПЛЕННЯ ВИВЧЕНОГО МАТЕРІАЛУ

- 1). Тренуємося розв'язувати задачі

Кисень знаходиться в нормальних умовах. Обчисліть середню квадратичну швидкість молекул газу.

Розв'язок

За нормальних умов тиск кисню дорівнює $1,01 \cdot 10^5$ Па, а густина — $1,43$ кг/м³. Вважаючи, що концентрація газу $n = N/V$, можна записати:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \bar{v}^2 = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m_0 \bar{v}^2 = \frac{1}{3} \frac{M}{V} \bar{v}^2 = \frac{1}{3} \rho \bar{v}^2$$

Звідси отримуємо:
$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}.$$

Перевіривши одиниці величин і виконавши розрахунки, отримуємо $\bar{v} = 460 \text{ м/с}$.

2. Визначте кінетичну енергію хаотичного поступального руху всіх молекул будь-якого газу в балоні об'ємом 5 л з тиском 1 МПа.

3. Чому дорівнює середня кінетична енергія хаотичного руху молекул аргону, якщо 2 кг його, перебуваючи в посудині об'ємом 2 м³, чинять тиск $3 \cdot 10^5 \text{ Па}$?

2). Контрольні запитання

1. Яким чином в основному рівнянні молекулярно-кінетичної теорії ми отримали множник 1/3?

2. Чому молекула при зіткненні зі стінкою посудини діє на неї з силою, пропорційною швидкості, а тиск пропорційно квадрату швидкості?

3. Як середня кінетична енергія молекул залежить від концентрації газу та його тиску на стінки посудини?

Що ми дізналися на уроці:

- Тиск ідеального газу прямо пропорційний концентрації часток, масі частки й середньому значенню квадрата швидкості частки.

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \bar{v}^2.$$

- Тиск ідеального газу пропорційний добутку концентрації молекул на середню кінетичну енергію поступального руху молекули:

$$p = \frac{2}{3} n \bar{E}.$$

Основне рівняння кінетичної теорії газів

Основне рівняння кінетичної теорії газів виражає зв'язок між тиском газу P і середньою кінетичною енергією руху його молекул $\langle W_K \rangle$ (тут і надалі символ $\langle \rangle$ означатиме «середнє»).

Тиск газу є макроскопічним проявом теплового руху молекул. При зіткненні молекул газу зі стінками посудини молекули передають стінкам свій імпульс. Зміни імпульсів молекул спричиняють виникнення тиску газу. У випадку ідеального газу взаємні зіткнення молекул не впливають на цей тиск. Внаслідок хаотичності руху молекул тиск газу на всі стінки однаковий і дорівнює середній силі, що діє перпендикулярно стінці на одиницю площі її поверхні.

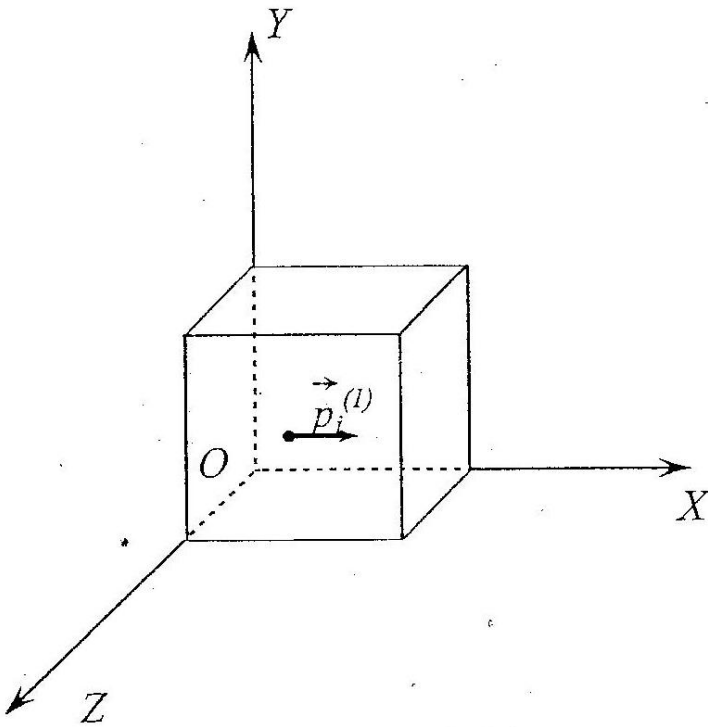


Рисунок 1.54

Розглянемо ідеальний газ, який міститься в посудині, що має форму куба із ребром a (рис. 1.54). Якщо газ перебуває в стані термодинамічної рівноваги із стінками посудини, то зіткнення можна вважати абсолютно пружними. Внаслідок хаотичності руху молекул можна припустити, що в трьох взаємно перпендикулярних напрямках (OX , OY , OZ) рухається однакова їх кількість:

$$N' = \frac{1}{3} N, \quad (1)$$

де N — число молекул в об'ємі $V = a^3$. Знайдемо сумарну дію молекул на праву стінку посудини, перпендикулярну OX . Якщо i -та молекула, імпульс якої $\vec{p}_i^{(1)} = m_i \vec{v}_i$ ударяється об стінку, то після удару її імпульс $\vec{p}_i^{(2)} = -\vec{p}_i^{(1)}$, а зміна імпульсу $\Delta \vec{p}_i = -2\vec{p}_i^{(1)} = -2m_i \vec{v}_i$.

Згідно з другим законом Ньютона

$$\Delta \vec{p}_i = \vec{f}_i \Delta t_i, \quad (2)$$

де $\vec{f}_i \Delta t_i$ — імпульс сили реакції стінки, що діє на молекулу. За третім законом Ньютона сила, що діє на стінку з боку i -тої молекули $\vec{f}_i = -\vec{f}_i$. Отже

$$\vec{f}_i \Delta t_i = -\vec{f}_i \Delta t_i = 2m_i \vec{v}_i. \quad (3)$$

Введемо середню силу удару $\langle f_i \rangle$, яка за час між двома послідовними зіткненнями $\tau_i = \frac{2a}{v_i}$ спричиняє таку ж дію, як f_i :

$$\langle f_i \rangle \tau_i = f_i \Delta t_i \quad (4)$$

(оскільки розглядаємо рух вздовж одного напрямку, знак вектора можна опустити). Остаточно одержимо

$$\langle f_i \rangle = \frac{1}{a} m_i v_i^2. \quad (5)$$

Згідно з означенням тиску маємо:

$$P = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^{N'} \langle f_i \rangle = \frac{1}{a^3} \sum_{i=1}^{N'} m_i v_i^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a^3} \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a^3} \sum_{i=1}^N W_{ki}. \quad (6)$$

Врахувавши, що середня кінетична енергія поступального руху молекул

$$\langle W_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N W_{ki}, \quad W_{ki} = \frac{m v_i^2}{2} \quad (7)$$

одержимо основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів:

$$P = \frac{2}{3} n \langle W_k \rangle, \quad p = \frac{1}{3} n_0 m \overline{v_{\text{ср}}^2} \quad (8)$$

де $n = \frac{N}{a^3}$ — число молекул в одиниці об'єму газу, тобто їх концентрація.

Для однорідного газу $m_i = m$ — маси всіх молекул однакові, але швидкості v_i різні. Тому

$$\langle W_k \rangle = \frac{m}{2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2 = \frac{m \overline{v_{\text{ср}}^2}}{2}, \quad (9)$$

де

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2} \quad (10)$$

середня квадратична швидкість молекул.

Помножимо обидві частини рівняння (8) на V :

$$PV = \frac{2}{3} N \langle W_{\kappa} \rangle. \quad (11)$$

Далі, враховуючи рівняння стану ідеального газу, одержимо такий вираз:

$$\langle W_{\kappa} \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (12)$$

де $k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ — стала Больцмана.

Відповідно

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \quad (13)$$

і

$$P = nkT. \quad (14)$$

З рівняння (12) випливає важливий висновок: абсолютна температура речовини є мірою середньої кінетичної енергії поступального руху молекул, з яких вона складається. Через середню кінетичну енергію молекул визначається і тиск газу. Обидва ці параметри (T і P) належать до статистичних величин і хоч температура, на відміну від тиску, не залежить від концентрації молекул, проте відносно однієї або кількох молекул поняття температури не має сенсу.

Розподіл молекул за швидкостями. Закон Максвелла

Закон розподілу молекул ідеального газу за швидкостями теоретично вивів Максвелл у 1860 р. Цей закон дає змогу знайти число молекул dn із загальної кількості n молекул газу при даній температурі, швидкості яких лежать у заданому інтервалі від v до $v+dv$:

$$dn = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv. \quad (1)$$

Функція

$$f(v) = \frac{1}{n} \cdot \frac{dn}{dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \quad (2)$$

називається функцією розподілу Максвелла, вона показує відносну кількість молекул, швидкості яких перебувають в інтервалі dv в околі швидкості v .

Користуючись законом Максвелла, можна визначити середню арифметичну швидкість молекул

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty f(v) v dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}. \quad (3)$$

Графік функції розподілу зображений на рис. 1.55.

Відносна кількість молекул $\frac{\Delta n}{n}$, швидкості яких знаходяться в інтервалі $(v, v+\Delta v)$, чисельно дорівнює площі заштрихованого стовпчика. Площа під графіком, очевидно, дорівнює одиниці.

Дані щодо розподілу молекул кисню за швидкостями подані в табл. 1.5.

Таблиця 1.5

Інтервал швидкостей, м/с	Кількість молекул, %
< 100	1,4
100÷200	8,1
200÷300	16,7
300÷400	21,5
400÷500	20,3
500÷600	15,1
600÷700	9,2

Максимум кривої відповідає *найбільш імовірній швидкості* v_{im} , яку можна обчислити, розв'язавши задачу на знаходження максимуму функції розподілу:

$$v_{im} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (4)$$

Наприклад, для кисню при температурі 273 К $v_{im} = 376,6$ м/с.

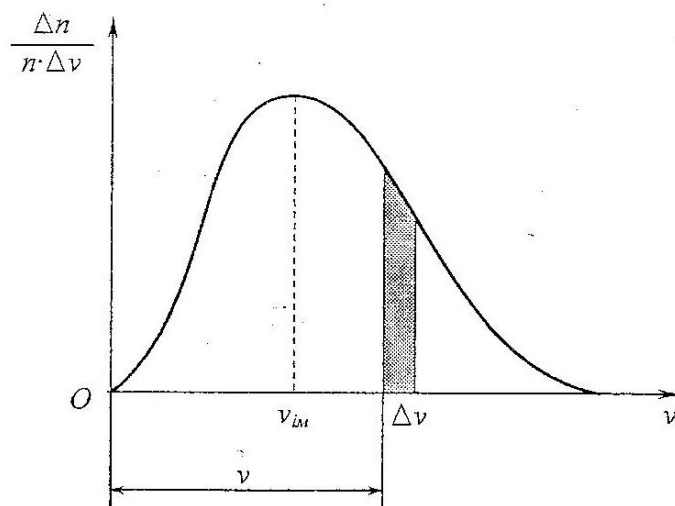


Рисунок 1.55

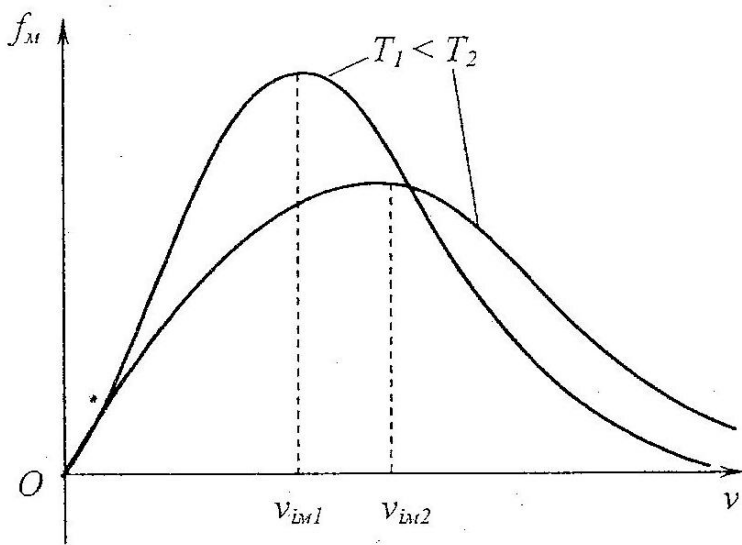


Рисунок 1.56

Аналізуючи графік, можна, зокрема, зробити висновок, що швидкості, які дуже відрізняються від найбільш імовірної, зустрічаються рідко.

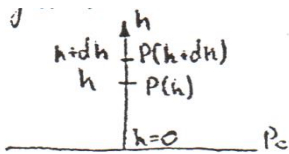
З підвищенням температури швидкості молекул загалом збільшуються, максимум кривої зсувається в бік більших швидкостей (рис. 1.56).

Газ в полі тяжіння. Барометрична формула Больцмана.

При розгляді молекул ідеального газу вважалося, що рух молекул газу є повністю хаотичним і молекули газу рівномірно розподілені по всьому об'єму. Проте із-за дії на мол. газу сили тяжіння, густина мол. змінюється з висотою, відповідно змін. з висотою і тиск газу. Тому, узагальнюючи, можна сказати, що поведінка мол. газу та розподіл їх з висотою визнач. двома основними факторами:

- завдяки дії сили тяжіння, всі молекули газу повинні б розташуватися в обл. $\min E_p$, тобто всі мол. повинні впасти на дно посудини «в якій знаходяться»;
- але завдяки тепловому рухові, який намагається привести до максимально рівномірного розподілу газу в об'ємі, «мол. газу не падають на дно і не встановлюється відповідний розподіл мол. газу з висотою в полі тяжіння.

Отримаємо цей закон розподілу мол. з висотою. Для простоти міркувань будемо розгл. односортний газ, маси молекул якого m_0 , який знаходиться при температурі T - однаковій по всьому об'єму.



Зміни тиску: $dP = P(h + dh) - P(h)$ визначається згідно закону Паскаля вагою вертикального стовпа газу висотою над одиничною площею ($S=1$), тобто: $dP = -\rho g dh$

«-» виражає, що із збільшенням висоти тиск зменшується.

$\rho = n(h)m_0$ – густина газу на висоті h .

Тоді $dP = -m_0 g n(h) dh$

Використовуючи співвідношення $P = nkT$ отримаємо:

$$dP = kT dn \quad (4)$$

Порівнявши останні два вирази: $-m_0 g n(h) dh = kT dn$

Розділяючи змінні, отримаємо: $\frac{dn}{n} = -\frac{m_0 g}{kT} dh$

$n(h) = \frac{P(h)}{kT}$

Проінтегруємо $\ln n(h) = -m_0 g h / kT + c$

$$n(h) = e^{-mgh / kT + c}$$

Постійну інтегрування знаходимо з початкових умов при $h=0$,

$n = n_0, p = p_0$: $n(h) = n_0 e^{-mgh / kT + c}$ - закон зміни концентрації мол. в гравітаційному полі Землі.

Отримаємо закон зміни густини та тиску з висотою $\rho(h) = m_0 n(h) = \rho_0 e^{-mgh / kT}$

$p(h) = n(h)kT = p_0 e^{-mgh / kT}$ - барометрична формула, що описує зміну тиску з висотою в гравітац. полі Землі.

У виразах mgh представляє собою E_p газу в гравітаційному полі Землі. Тому узагальнимо закон зміни густини з висотою на випадок будь-якого потенціального поля, в якому знаходяться частки термодинамічної системи. Ми отримаємо розподіл Больцмана для часток системи в потенціальному полі: $n = n_0 e^{-E_p / kT}$

№ 2.15.

У посудині об'ємом $V = 3 \text{ дм}^3$ міститься азот при температурі $t = 17^\circ\text{C}$ і тиску $p = 10^{-4} \text{ Па}$. Визначити кількість молекул N азоту в посудині.

Відп.: $N = \frac{pV}{kT} = 7,5 \cdot 10^{13}$.

№ 2.79 (змінена)

При температурі $t = 127^\circ\text{C}$ найбільш ймовірна швидкість молекул деякого газу $v_i = 1820 \text{ м/с}$. Встановити, який це газ.

Відп.: водень.

№ 2.95

На якій висоті h над поверхнею Землі парціальний тиск вуглекислого газу зменшується 2 рази? Температуру атмосфери вважати сталою і такою, що $t = 27^\circ\text{C}$.

Відп.: $h = 3,84 \text{ км}$.

№ 2.15

$$V = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$t = 17^\circ\text{C}; T = 290 \text{ К}$$

$$p = 10^{-4} \text{ Па}$$

$$N = ?$$

$$pV = NkT$$

$$N = \frac{pV}{kT}$$

$$N = \frac{10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290} =$$

$$= 0,005 \cdot 10^{16} = 7,5 \cdot 10^{13}$$

або: $p = nkT; n = \frac{N}{V}$

$$p = \frac{N}{V} kT \rightarrow N =$$

$$[N] = \frac{\text{Па} \cdot \text{м}^3}{\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot \text{К}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{Дж}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^3}{\text{Н} \cdot \text{м}} = \text{моль}$$

№ 2.79

$$t = 127^\circ\text{C}; T = 400 \text{ К}$$

$$v_i = 1820 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$M = ?$$

$$v_i = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

$$v_i^2 = \frac{2RT}{M} \Rightarrow M = \frac{2RT}{v_i^2}$$

$$M = \frac{2 \cdot 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 400 \text{ К}}{3312400 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = 0,002 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

$$[M] = \frac{\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot \text{К}}{\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{моль} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}}{\text{с}^2 \cdot \text{моль} \cdot \text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$$

№ 2.95

$$t = 27^\circ\text{C}; T = 300 \text{ К}$$

$$\frac{p_0}{p} = 2$$

$$h = ?$$

$$p = p_0 e^{-\frac{Mg}{RT}(h-h_0)}$$

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{Mg}{RT}h}$$

$$\frac{p_0}{p} = e^{\frac{Mg}{RT}h}$$

$$\ln \frac{p_0}{p} = \frac{Mg}{RT}h$$

$$h = \frac{(\ln \frac{p_0}{p}) \cdot RT}{Mg}$$

$$h = \frac{\ln 2 \cdot 8,31 \cdot 300}{44 \cdot 10^{-3} \cdot 10} = 3,93 \text{ км}$$

$$[h] = \frac{\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot \text{К}}{\frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Н}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Н}} = \text{м}$$

Матеріал для самостійного вивчення

Внутрішня енергія системи. Число ступенів вільності молекул. Закон рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності. Внутрішня енергія ідеального та реального газів. Робота і теплота як форми передавання енергії. Робота газу в ізобарному процесі. Перший закон термодинаміки та його застосування для ізопроцесів в ідеальному газі.

Внутрішня енергія ідеального газу

1. Робота газу при зміні його об'єму. Фізичний зміст універсально газової сталої та сталої Больцмана
2. Закон збереження енергії. Перше начало термодинаміки. Адіабатний процес
3. Внутрішньою енергією називається сума кінетичної і потенціальної енергії всіх молекул речовини.

Кінетична енергія – це енергія руху, а потенціальна – це енергія взаємодії. Сума кінетичних і потенціальних енергій всіх молекул речовини називається внутрішньою енергією.

Оскільки в ідеальному газі відсутні сили взаємодії, то це означає, що молекулярно-потенціальна енергія у нього відсутня. Таким чином внутрішня енергія ідеального газу представляє собою тільки суму значень кінетичних енергій хаотичного руху всіх його молекул.

$$U = \sum_{i=1}^n \bar{E}_i$$

$$\bar{E} = \frac{3}{2} kT$$

Для одного моля внутрішня енергія буде виражена формулою:

$$U_{\text{моль}} = \frac{3}{2} N_A kT$$

$$U_{\text{моль}} = \frac{3}{2} kT$$

А для довільної маси одноатомного газу:

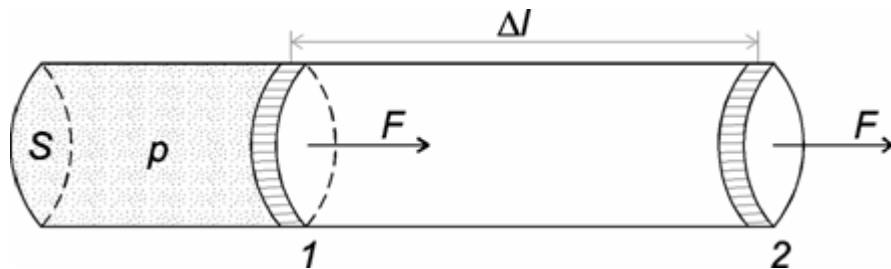
$$U_1 = \frac{3}{2} \frac{m}{\mu} RT$$

$$U_2 = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} RT \quad - \text{ для двоатомного газу}$$

$$U_3 = 3 \frac{m}{\mu} RT \quad - \text{ для багатоатомного газу}$$

2. Стискаючи газ ми виконуємо роботу, а під час розширення газу він сам буде виконувати роботу.

(мал. 1)



Якщо газ нагріти від T_1 до T_2 , то тиск газу збільшиться і поршень переміститься з положення 1 в положення 2 на відстань Δl в результаті виконаної газом роботи проти зовнішніх сил.

Сила, яка виконує цю роботу, дорівнює добутку тиску на площу.

$$F = p \cdot S$$

$$A = F \Delta l = p S \cdot \Delta l$$

Оскільки $S \cdot \Delta l$ – це зміна об'єму, то маємо $A = p \Delta V$ або $A = p(V_2 - V_1)$.

Газ виконує роботу тільки тоді коли є зміна об'єму.

Універсальна газова стала чисельно дорівнює роботі, яку виконує моль ідеального газу при його ізобаричному нагріванні на 1 Кельвін.

$$R = \frac{A_{\text{моль}}}{\Delta T}$$

Стала Больцмана показує скільки роботи припадає в середньому на одну молекулу ідеального газу при ізобаричному нагріванні на один Кельвін

$$k = \frac{R}{N_A}$$

3. Всі процеси, які відбуваються в природі підкоряються закону збереження і перетворення енергії.

Енергія у замкнутій системі і у всіх явищах природи ніколи не зникає і не створюється з нічого, вона лише перетворюється з одного виду в інший або передається від одного тіла до іншого не змінюючись кількісно.

Вічний двигун першого роду неможливий.

Зміна енергії тіла відбувається тільки при виконанні механічної роботи або при теплообміні. Закон збереження енергії є першим всезагальним законом природи і лежить в основі термодинаміки, де його називають першим началом термодинаміки.

Підведення до системи кількість теплоти Q частково іде на збільшення внутрішньої енергії системи ΔU і частково на виконання цією системою роботи A

$$Q = \Delta U + A$$

Вигляд цього рівняння для ізопроцесів:

ізохоричний

$$V = \text{const}$$

$$A = 0$$

$$Q = \Delta U$$

ізобаричний

$$p = \text{const}$$

робота вих.

$$Q = \Delta U + A$$

збільшується об'єм і
підвищується температура

ізотермічний

$$T = \text{const}$$

$$\Delta U = 0$$

$$Q = A$$

система не
нагрівається, енергія
іде на виконання
роботи

Процес в якій-небудь системі, що відбувається без теплообміну з оточуючим середовищем називається адіабатним процесом.

$$Q = 0, \text{ тоді } \Delta U + A = 0$$

$$A = -\Delta U$$

З цього випливає, що під час адіабатного процесу система може виконувати роботу тільки за рахунок зменшення своєї внутрішньої енергії.

Внутрішня енергія реального газу дорівнює кінетичній енергії теплового руху його молекул E_k і потенціальній енергії міжмолекулярної взаємодії E_n . Потенціальна енергія реального газу зумовлена лише силами притягання між молекулами, які приводять до виникнення внутрішнього тиску на газ.

Робота, яка затрачається для подолання сил притягання, що діють між молекулами газу, або проти внутрішнього тиску, йде на збільшення потенціальної енергії системи:

$$\delta A = P' dV_{*} = dE_{*} \text{ або } \int dE_{*} = \int \frac{\alpha}{V_{*}^2} dV_{*}$$

Звідси

$$E_{*} = -\frac{\alpha}{V_{*}} \quad (2.66)$$

Знак “—” означає, що молекулярні сили, які створюють внутрішній тиск P' є силами притягання. Внутрішня енергія ідеального газу дорівнює тільки кінетичній енергії хаотичного руху молекул. Тому

$$E_{*} = U_{*} = \int dU_{*} = \int C_V dT = C_V T$$

Тоді внутрішня енергія одного моля реального газу:

$$U_{*} = C_V T - \frac{\alpha}{V_{*}} \quad (2.67)$$

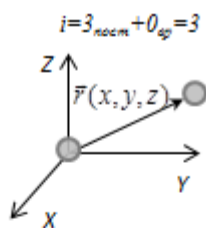
і вона росте зі збільшенням температури та об'єму газу.

Число ступенів свободи молекули. Закон про рівномірний розподіл енергії по ступенях свободи молекули

Число ступенів свободи: механічної системи називається кількість незалежних величин, з допомогою яких може бути задане положення системи. Одноатомний газ має три поступальні ступені свободи $i = 3$, тому що для опису положення такого газу в просторі досить трьох координат (x, y, z).

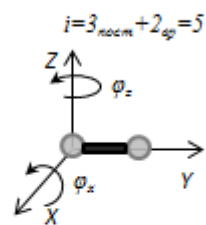
Твердим зв'язком називається зв'язок, при якому відстань між атомами не змінюється. Двохатомні молекули із твердим зв'язком (N_2 , O_2 , H_2) мають 3 поступальні ступені свободи й 2 обертальні ступені свободи: $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{обер}} = 3 + 2 = 5$.

Поступальні ступені свободи пов'язані з рухом молекули як цілого в просторі, обертальні - з поворотом молекули як цілого. Обертання відносно осей координат x і z на кут φ_x и φ_z приведе до зміни положення молекул у просторі, при обертанні щодо осі y молекула не змінює своє положення, отже, координата φ_y у цьому випадку не потрібна. Трьохатомна молекула із твердим зв'язком має 6 ступені свободи



$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{обер}} = 3 + 3 = 6$$

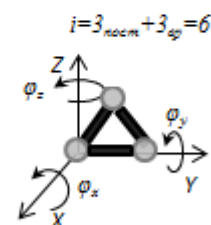
Якщо зв'язок між атомами не твердий, то додаються коливальні ступені свободи. Для нелінійної молекули $i_{\text{кол}} = 3N - 6$, де N - число атомів у молекулі.



Незалежно від загального числа ступенів свободи молекул 3 ступеня свободи завжди поступальні. Жодна з поступальних ступенів не має переваги перед іншими, тому на кожен з них доводиться в середньому однакова енергія, рівна $1/3$ значення $\bar{\epsilon}$

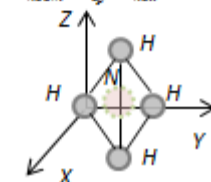
$$p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_{\text{3пост}} \quad p = nkT \Rightarrow$$

$$\bar{\epsilon}_{\text{пост}3} = \frac{3}{2} kT \quad \bar{\epsilon}_1 = \frac{\bar{\epsilon}_{\text{3пост}}}{3} = \frac{1}{2} kT$$



Больцман установив закон, згідно з яким для статистичної системи (тобто для системи в якій число молекул велике), що перебуває в стані термодинамічної рівноваги на кожний поступальний і обертальний ступінь свободи доводиться в середньому кінетична енергія, рівна $1/2 kT$, і на кожний коливальний ступінь свободи - у середньому енергія, рівна kT . Коливальний ступінь свободи « має » удвічі більшу енергію тому, що на неї доводиться не тільки кінетична енергія (як у випадку поступального й обертового руху), але й потенційна енергія, причому $\epsilon_{\text{кин}} = \epsilon_{\text{пот}}$

$$I_{\text{NH}_3} = 3_{\text{пост}} + 3_{\text{об}} + 9_{\text{кол}} = 15 = 3n$$



у такий спосіб середня енергія молекули

$$\bar{\epsilon} = \frac{i'}{2} kT$$

$$i' = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}$$

Ми будемо розглядати молекули із твердим зв'язком, тому

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}}$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{i}{2} kT$$

тому що в ідеальному газі взаємна потенційна енергія молекул дорівнює нулю (молекули не взаємодіють між собою), то внутрішня енергія 1 моля дорівнює добутку середньої енергії однієї молекули на число молекул у молі речовини, тобто на число Авогадро

$$U_{1\text{м}} = \frac{i}{2} kT N_A = \frac{i}{2} RT$$

Для $\nu = \frac{m}{\mu}$ молів газу

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} k T N_A = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R T = \nu \frac{i}{2} R T$$

Лекція № 7

Тема: Теплоємність речовини. Адіабатний процес. Рівняння Пуассона. Політропний процес. Рівняння політропи. Ефект Джоуля-Томсона. Зрідження газів.

Мета: ввести поняття теплоємності речовини, адіабатного, політропного процесу; пояснити ефект Джоуля-Томсона та його застосування.

Обладнання: таблиці питомих теплоємностей.

Хід заняття

I. Організаційний момент.

- а) готовність групи до заняття;
- б) психоемоційний настрій;
- в) перевірка присутніх.

II. Актуалізація опорних знань студентів.

Дати відповіді на запитання:

- *Сформулювати перший закон термодинаміки.
- *Записати перший закон термодинаміки для ізопроцесів.
- *Записати формулу для внутрішньої енергії одноатомного ідеального газу та пояснити її.

III. Виклад нового матеріалу.

План

1. Теплоємність тіла. Питома та молярна теплоємності. Інша форма запису першого закону термодинаміки для ізопроцесів.
2. Адіабатний процес. Перший закон ТД для адіабатного процесу.
3. Рівняння Пуассона
4. Політропний процес. Рівняння політропи.
5. Внутрішня енергія реального газу. Ефект Джоуля-Томсона.
6. Зрідження газів.

IV. Узагальнення та систематизація знань.

Розв'язати задачі №№ 2.166; 2.190 із збірника задач за ред. І.П.Гаркуші.

V. Підведення підсумків заняття.

VI. Домашнє завдання: вивчити матеріал лекції; за підручником

«Загальний курс фізики», т.1, за ред. Кучерука І.М.

опрацювати матеріал §16.3-16.5 або за підручником

«Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф. - §55, 57, 65-66

розв'язати задачу №6 на с. 205 підр. «Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф.

Зміст лекції додається.

Лекція № 7

Теплоємність. Робота газу

1. Питома теплоємність речовини c – величина рівна кількості теплоти, необхідному для нагрівання 1 кг речовини на 1 K.

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}$$

$$c = \frac{Q}{m \Delta T}$$

$$[c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{K}}$$

Молярна теплоємність C_μ – величина рівна кількості теплоти, необхідному для нагрівання 1 моля речовини на 1 K.

$$C_\mu = \frac{\delta Q}{\nu dT}$$

$$C_\mu = \frac{Q}{\nu \Delta T}$$

$$[C_\mu] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}$$

Зв'язок молярної й питомої теплоємності

$$C_\mu = c \cdot \mu$$

Розрізняють теплоємності при постійному об'ємі C_V ($V = \text{const}$) і постійному тиску C_p ($p = \text{const}$), якщо в процесі нагрівання речовини його об'єм або тиск підтримується постійним.

Теплоємність речовини

Теплоємністю C тіла називається фізична величина, яка дорівнює кількості теплоти ΔQ , яку треба надати тілу, щоб підвищити його температуру на 1 К при даному термодинамічному процесі:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \left([C] = \frac{[Q]}{[T]} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \right). \quad (1)$$

Значення C залежить від маси тіла, його хімічного складу, термодинамічного процесу і стану, при якому надається теплота ΔQ .

Питома теплоємність c називається теплоємність одиниці маси речовини. Для однорідного тіла

$$c = \frac{C}{M} \left([c] = \frac{[C]}{[M]} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \right). \quad (2)$$

Молярною теплоємністю C_μ називається теплоємність одного моля речовини

$$C_\mu = \mu c \left([C_\mu] = [\mu][c] = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right). \quad (3)$$

Враховуючи формулу (1), перший принцип термодинаміки для рівноважних процесів можна записати так:

$$\frac{M}{\mu} C_\mu dT = dU + PdV. \quad (4)$$

При *ізохорному процесі* вся кількість теплоти, яка передається газу, іде на зміну його внутрішньої енергії: $\delta Q = dU$. Позначимо через $C_{V\mu}$ молярну теплоємність при сталому об'ємі. Врахувавши співвідношення (3) § 11, для *ідеального газу* одержимо:

$$\begin{cases} dU = \frac{M}{\mu} C_{V\mu} dT \\ U = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} RT \end{cases} \Rightarrow C_{V\mu} = \frac{i}{2} R. \quad (5)$$

При ізобарному процесі

$$\begin{cases} \frac{M}{\mu} C_{p\mu} dT = \frac{M}{\mu} C_{v\mu} dT + PdV \\ PdV = \frac{M}{\mu} R dT \end{cases} \Rightarrow C_{p\mu} = C_{v\mu} + R. \quad (6)$$

Рівняння (6) має назву *рівняння Майєра*. Його суть полягає в тому, що при ізобарному нагріванні газу на один градус до газу необхідно підвести більше теплоти, ніж для такого ж ізохорного нагрівання. Різниця цих теплот дорівнює роботі, виконаній газом при ізобарному розширенні. Для одного моля газу ця робота дорівнює R .

Враховуючи рівняння (5), одержимо

$$C_{p\mu} = \frac{i+2}{2} R. \quad (7)$$

Закон рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності приводить до висновку, що теплоємності газу залежать тільки від числа ступенів вільності молекул і не залежать від температури. З цим висновком класичної теорії не узгоджуються результати експериментальних досліджень. На рис. 1.67 зображена експериментальна залежність молярної теплоємності $C_{v\mu}$ від абсолютної температури для водню (H_2).

На графіку виділяються ділянки паралельні осі температур: $C_{v\mu} = \frac{3}{2} R$ — при низьких температурах, $C_{v\mu} = \frac{5}{2} R$ — в діапазоні середніх температур, $C_{v\mu} = \frac{7}{2} R$ — при високих температурах.

Отже, в певному інтервалі низьких температур водень поводить себе як одноатомний газ, при середніх температурах — як двоатомний (крім поступальних треба враховувати ще обертальні рухи молекул), а при високих температурах проявляю-

ться також коли-
вальні рухи атомів
в молекулах.

Відхилення екс-
периментальних
даних від виснов-
ків класичної теорії
одержали своє по-
яснення в кванто-
вій теорії, згідно з
якою всі складові
внутрішньої енергії
газу, за винятком

енергії поступаль-
ного руху, можуть змінюватись не довільно, а лише певними
порціями (квантами). При низьких температурах молекули по-
водять себе як одноатомні, бо теплової енергії ще не вистачає,
щоб змінити енергію обертальних рухів молекул і коливальних
рухів атомів у молекулах. У середньому діапазоні температур
збуджуються обертальні рухи ($i=5$), а при високих (~ 1000 К) —
коливальні ($i=7$).

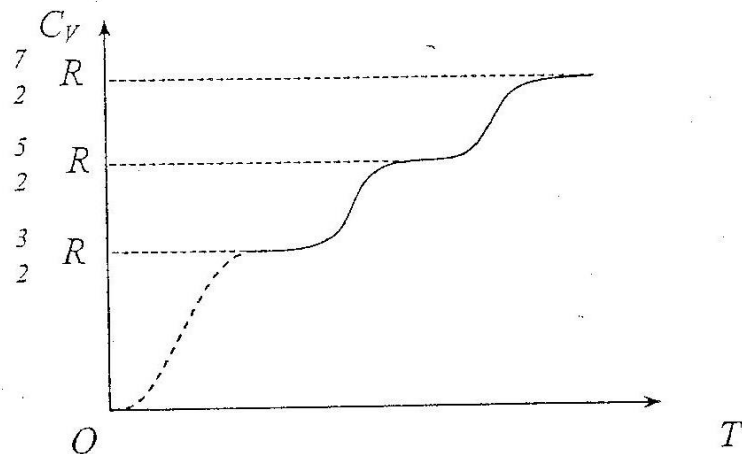


Рисунок 1.67

Адіабатний процес

Адіабатним називається процес, що відбувається без тепло-
обміну з навколишнім середовищем. Отже, при адіабатному
процесі $\delta Q = 0$, звідки

$$\delta A = -dU. \quad (1)$$

Це означає, що при адіабатному процесі робота виконується
за рахунок внутрішньої енергії системи.

У випадку ідеального газу

$$\delta A = -\frac{M}{\mu} C_{v\mu} dT. \quad (2)$$

При адіабатному розширенні робота $\delta A = PdV > 0$, а $dT < 0$
(температура газу знижується), при адіабатному стиску $\delta A < 0$,
 $dT > 0$ (газ нагрівається).

Щоб здійснити адіабатний процес, треба ізолювати термодинамічну систему від навколишнього середовища ідеальною не-теплопровідною оболонкою. У природі таких оболонок не існує, а тому практично створюються умови, за яких процес є близьким до адіабатного. Такими є дуже швидкі процеси (процеси в теплових машинах, в двигунах внутрішнього згоряння тощо). В природі маси повітря, що нагріваються біля поверхні Землі, піднімаються вгору в область низьких тисків і розширюються. Це процес, близький до адіабатного, бо повітря має погану теплопровідність. Розширюючись, повітря охолоджується, а водяна пара при цьому конденсується. Утворюються хмари і тумани.

При адіабатному процесі одночасно змінюються всі три параметри газу P , V і T . Залежність між ними описує рівняння Менделєєва-Клапейрона. Співвідношення між тиском і об'ємом задовольняє рівняння Пуассона. Виведемо його.

Із рівняння

$$\frac{M}{\mu} C_{v\mu} dT + PdV = 0, \quad (3)$$

яке виражає перший принцип термодинаміки для адіабатного процесу, виключимо dT . Для цього знайдемо диференціал від правої і лівої частин рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$PdV + VdP = \frac{M}{\mu} R dT. \quad (4)$$

Врахувавши співвідношення (4) і рівняння Майєра, одержимо.

$$\frac{1}{\gamma - 1} (PdV + VdP) + PdV = 0,$$

де

$$\gamma = \frac{C_{p\mu}}{C_{v\mu}} = \frac{i + 2}{i}. \quad (5)$$

У результаті нескладних перетворень маємо:

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0,$$

а після інтегрування і потенціювання одержимо рівняння Пуассона:

$$PV^\gamma = \text{const.} \quad (6)$$

На діаграмі (P-V) адіабатний процес зображається кривою, яка називається *адіабатою* (рис. 1.68). Порівнюючи ізотермічний і адіабатний процеси, бачимо, що вони істотно відрізняються.

Теплоємність при ізотермічному процесі $C_T = \infty$, при адіабатному $C_Q = 0$; теплопровідність оболонки, в якій знаходиться термодинамічна система, при ізотермічному процесі $k_T = \infty$, при адіабатному $k_Q = 0$; при ізотермічному процесі задовольняється закон Бойля-Маріотта — $PV = \text{const}$, при адіабатному — закон Пуассона.

Обидва ці процеси в чистому вигляді в природі не виконуються. Натомість мають місце так звані *політропні* процеси, які задовольняють *рівняння політропи* —

$$PV^\alpha = \text{const}, \quad (7)$$

де α — показник політропи, $1 < \alpha < \gamma$.

Якщо α близьке до 1, то процес можна вважати ізотермічним, якщо α близьке до γ — адіабатним.

Роботу при адіабатному процесі можна обчислювати за такими формулами:

$$A_{12} = \frac{M}{\mu} C_{v\mu} (T_1 - T_2), \quad (8)$$

$$A_{12} = \frac{1}{\gamma - 1} (P_1 V_1 - P_2 V_2), \quad (9)$$

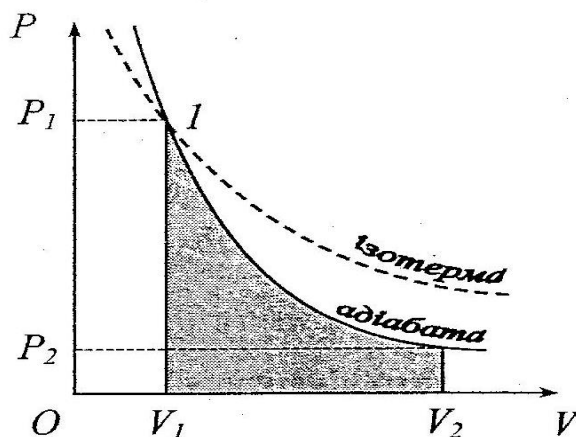


Рисунок 1.68

$$A_{12} = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left(\left(1 - \frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\gamma} \right). \quad (10)$$

На рис. 1. 68 ця робота вимірюється площею заштрихованої фігури.

Ефект Джоуля-Томсона

Досліди Гей-Люсака та Джоуля (див. Лекція 7), які дали можливість визначити залежність внутрішньої енергії ідеального газу від температури та об'єму, мали невисоку точність, оскільки теплоємність повітря була малою в порівнянні із теплоємністю балонів і води в калориметрі. Через це малі зміни температури складно виявити. На протязі 1852-1862 рр. Джоуль і Томсон виконали ряд дослідів, які, з одного боку, дозволили остаточно встановити залежність внутрішньої газу від об'єму; з іншого, з їх допомогою було відкрито нове явище, яке отримало назву *ефекту Джоуля-Томсона*.

В досліді Джоуля-Томсона бралась циліндрична трубка, покрита теплоізолюючим матеріалом. В середині трубки між двома металевими сітками MN і $M'N'$ розміщувалось пробка із щільної вати або шовкові очоси. Досліджуваний газ під дією різниці тисків повільно протікав крізь пробку. Через наявність пробки протікання газу було спокійним, тобто без турбулентних рухів. Крім того, пробка забезпечувала повільність протікання, так що кінетичною енергією руху центру мас газу можна було знехтувати. За цих умов в кожний момент часу газ по обидві сторони пробки знаходився в стані термодинамічної рівноваги. Наявність теплоізолюючої оболонки забезпечувало адіабатність процесу протікання газу. Тиски газу P_1 та P_2 підтримувались постійними. Пробка і газ під час процесу обмінювались між собою теплом. Але коли процес ставав стаціонарним, теплообмін закінчувався, а отже її внутрішня енергія залишалась незмінною. При стаціонарному протіканні з одного боку від пробки встановлювалось незмінною. При стаціонарному протіканні з одного боку від пробки встановлювалось постійна температура газу T_1 , а по інший – постійна температура T_2 . Ці температури і вимірювались в досліді.

Стаціонарне протікання газу крізь пробку називається *процесом Джоуля-Томсона*, а зміна температури газу при такому протіканні – *ефектом Джоуля-Томсона*.

Відділимо подумки зліва від пробки об'єм V_1 , що займає простір $ABNM$. Після проходження крізь пробку виділена порція газу займе простір $M'N'A'B'$ з об'ємом V_2 . Границя AB переходить в MN . При цьому над газом виконується робота $P_1 \cdot S \cdot AM = P_1 V_1$ (S – площа поперечного перетину трубки). Границя переходить в

положення $A'B'$, і газ виконує роботу $P_2 \cdot S \cdot MA' = P_2 V_2$. Повна робота, виконана газом, дорівнює $A = P_2 V_2 - P_1 V_1$. Тепло до системи не надходить. Фізичний стан пробки і її внутрішня енергія залишились незмінними. Перший закон термодинаміки можна записати

$$U_2 - U_1 + A = 0$$

або

$$U_2 + P_2 V_2 = U_1 + P_1 V_1.$$

☐ З а означеннями ентальпія $I = E + PV$. Тому останній вираз означає, що в процесі Джоуля-Томсона *ентальпія I газу не змінюється*

Зрідження газів

Перехід газів у рідкий стан називається *зрідженням газів*. Довгий час деякі гази, зокрема кисень і азот, не вдавалось перетворити в рідини. Вважали, що рідкий кисень і рідкий азот взагалі існувати не можуть. Причину невдачі зрідження цих газів уперше пояснив Д. І. Менделєєв: газ можна перетворити в рідину, якщо його температура нижча від критичної, а тиск вищий від критичного; отже, температуру газів перед фідженням треба спочатку знижувати до значення $T_{кр}$.

Гази, які мають досить високу (вище 220 К) критичну температуру, звичайно зріджують, стискаючи, а потім охолоджуючи його до температури, яка нижча від температури кипіння. У такий спосіб добувають вуглекислоту ($T_{кр} = 304,25$ К), хлор ($T_{кр} = 417,15$ К), аміак ($T_{кр} = 405,55$ К) тощо.

Для добування рідкого кисню ($T_{кр} = 154,45$ К), азоту ($T_{кр} = 126,05$ К), водню ($T_{кр} = 33,25$ К) і особливо гелію ($T_{кр} = 5,25$ К) використовують спеціальні установки - *детандери*.

Детандер - це пристрій, в якому потрібної для зрідження газів температури досягають тим, що охолоджуваний газ виконує роботу не тільки проти сил молекулярної взаємодії, а й проти зовнішніх сил. Найдосконаліший і урбодетандер реактивного типу розробив радянський фізик П. Л. Капіца (1938)*. У цьому пристрої спочатку стиснений газ, обертаючи турбіну і розширюючись при цьому, виконує роботу проти зовнішніх сил, дуже охолоджується і конденсується. Детандери широко застосовують у промисловості.

Використання отриманої рідини в техніці

Велике значення для розвитку техніки має отримання рідкого повітря. З рідкого повітря легко отримати азот і кисень. Якщо рідке повітря нагрівати, то першим випаровуватиметься азот при 77 К, а потім кисень при 90 К.

Оскільки рідке повітря має досить значний вміст кисню, то воно сприяє горінню. Вугільний порошок, просочений рідким повітрям, - це речовина, яка за вибуховою силою не поступається динаміту,

* П. Л. Капіца (1894-1984) - учень Резерфорда, лауреат Нобелівської премії.

Рідке повітря широко застосовують для збагачування пальної суміші двигуна літака під час польотів у стратосфері, для підсилення доменного процесу тощо.

При температурі зріджених газів різні речовини переходять у твердий стан. Так, наприклад, обливаючи рідким повітрям ртуть, можна перетворити її в твердий стан. Зануривши в посудину з рідким повітрям пробірку зі спиртом, дістають твердий спирт, температура замерзання якого 159 К.

Фізичні властивості багатьох речовин при температурі зріджених газів значно змінюються. Так, наприклад, ртуть і цинк стають ковкими, свинець - пластичний метал - стає пружним, як сталь. Деякі тіла, пружні при звичайній температурі, будучи охолодженими в зрідженому газі, стають крихкими, як скло. Так, наприклад, кусок гуми після охолодження в рідкому повітрі легко ламається. При температурах, близьких до 0 К, у багатьох речовин опір електричному струму зменшується до нуля. Це явище назвали *надпровідністю*.

Зріджені гази швидко випаровуються. Для їх збереження Дьюар сконструював спеціальні посудини з подвійними стінками, з внутрішнього простору між якими відкачано повітря. У такий спосіб майже усувається теплообмін вмісту посудин із зовнішнім середовищем через конвекцію і теплопровідність. Для зменшення нагрівання через випромінювання стінки виготовляють дзеркальними. Одна з посудин Дж. Дьюара - термос, призначений для збереження їжі в гарячому вигляді.

Приклади розв'язування задач

№ 2.166 (змінена)

Обчислити молярні теплоємності C_v і C_p та їхнє відношення γ для ідеального газу, що містить одноатомні молекули.

Відп.: $C_v = \frac{3}{2} R$; $C_p = \frac{5}{2} R$; $\gamma = 1,67$.

№ 2.190

Азот, маса якого $m = 0,1$ кг, був ізобарно нагрітий від $T_1 = 200$ К до $T_2 = 400$ К. Визначити роботу A , виконану газом, отриману ним кількість теплоти Q та зміну внутрішньої енергії азоту ΔU .

Відп.: $A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1) = 5,93$ кДж; $Q = \frac{m}{M} \frac{(i+2)}{2} R(T_2 - T_1) = 20,76$ кДж; $\Delta U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R(T_2 - T_1) = 14,83$ кДж.

$N=1$
 $i=3$
 C_v, C_p
 $\gamma = C_p/C_v = ?$

$C_v = \frac{i}{2} R$; $C_p = \frac{i+2}{2} R$
 $C_p = \frac{i+2}{2} R$; $C_p = \frac{5}{2} R$
 $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5/2 R}{3/2 R} = \frac{5}{3} = 1,67$

$i=5$
 $m = 0,1$ кг
 $p = \text{const}$
 $T_1 = 200$ К
 $T_2 = 400$ К
 A, Q
 $\Delta U = ?$

$A = p \Delta V$
 $p \Delta V = \frac{m}{M} R \Delta T$
 $A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1)$; $A = 5,93 \cdot 10^3$ Дж
 $Q = C_p m \Delta T$
 $C_p = \frac{C_v}{\gamma}$; $C_p = \frac{i}{2} R$
 $C_p = \frac{5/2 R}{1,67}$
 $Q = \frac{5/2 R}{1,67} \cdot m(T_2 - T_1) = \frac{m}{M} \cdot \frac{5/2 R}{1,67} R(T_2 - T_1)$
 $Q = 20,76 \cdot 10^3$ Дж
 $\Delta U = A + Q$
 $Q = \Delta U + A$
 $\Delta U = Q - A$
 $\Delta U = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1) + \frac{m}{M} \frac{i+2}{2} R(T_2 - T_1) = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R(T_2 - T_1)$
 $\Delta U = 14,83 \cdot 10^3$ Дж

Лекція № 8

Тема: Оборотні і необоротні процеси. Колові процеси. Принцип дії теплової і холодильної машин. Цикл Карно. Коефіцієнт корисної дії теплової машини. Другий закон термодинаміки. Нерівність Клаузіуса. Ентропія. Теплова теорема Нернста. Статистичний

смысл второго закона термодинамики.

Мета: пояснити принцип дії теплової і холодильної машин; навчити описувати роботу ідеальної теплової машини Карно; обґрунтовувати неможливість створення вічного двигуна другого роду; ввести поняття ентропії.

Обладнання: таблиці

Хід заняття.

I. Організаційний момент.

- а) готовність групи до заняття;
- б) психоемоційний настрій;
- в) перевірка присутніх.

II. Мотивація навчальної діяльності студентів.

- а) повідомлення теми та мети заняття;
- б) Перший закон термодинаміки є законом збереження енергії для систем, суттєву роль в яких відіграють теплові процеси. Другий закон визначає напрям теплових процесів. Обидва ці закони не доводяться теоретично, а стверджуються на основі досвіду і підтверджуються дослідженнями.

III. Виклад нового матеріалу.

План

- 1. Обороти і необороти процеси.
- 2. Колові процеси.
- 3. Принцип дії теплової і холодильної машин.
- 4. Цикл Карно.
- 5. Коефіцієнт корисної дії теплової машини.
- 6. Другий закон термодинаміки.
- 7. Нерівність Клаузіуса. Ентропія.
- 8. Теплова теорема Нерста. Статистичний смисл другого закону термодинаміки.

IV. Узагальнення та систематизація знань.

Розв'язати задачу № 2.243 із збірника задач за ред. І.П.Гаркуші.

V. Підведення підсумків заняття.

VI. Домашнє завдання: вивчити матеріал лекції; за підручником

«Загальний курс фізики», т.1, за ред. Кучерука І.М. опрацювати матеріал §16.6 – 16.10 або за підручником «Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф. - §58-61
розв'язати задачу №9 на с. 205 підр. «Фізика».

Зміст лекції додається.

Самостійне вивчення: опрацювати матеріал теми «Рідини. Їх структура та властивості. Кристалічні та аморфні тверді тіла» за підручником «Загальний курс фізики», т.1, за ред. Кучерука І.М. §19.1-19.4; §18.1-18.3; §21.1-21.4., або за підручником «Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф. - § 69; §72-77.

Лекція № 8

1. Другий закон термодинаміки

Другий закон термодинаміки встановлює **напрямок перебігу** і характер процесів, що відбуваються в природі.

Згідно із Клаузіусом, який дав одне з перших формулювань другого закону термодинаміки: **теплота ніколи не може переходити сама собою від тіл з нижчою температурою до тіл з вищою температурою.**

Це означає, що для такого переходу теплоти потрібна затрата роботи зовнішнього джерела, що здійснюється в холодильній машині.

Фізичний зміст другого закону найбільш зрозуміло розкривається у формулюванні Планка: **неможливо побудувати таку періодично діючу теплову машину, яка, отримавши ззовні деяку кількість теплоти при довільній температурі, цілком перетворювала би її в механічну роботу і при цьому поверталась би точно у вихідний стан.**

Отже, в довільній тепловій машині перетворюється в роботу лише частина отриманої від нагрівника кількість теплоти, тобто $A = Q_1 - Q_2$. Теплота Q_2 , не використовується в машині і розсіюється в навколишньому середовищі. Величина Q_2 завжди досить велика, тому

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

коефіцієнт корисної дії теплової машини завжди значно менший від одиниці.

Із формули К.К.Д. теплової машини, що працює за

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

циклом Карно, впливає, що Q_2 дорівнювала би нулеві лише в тому випадку, якби температуру робочого тіла можна було би довести до температури абсолютного нуля, яку повинен мати холодильник. К.К.Д. реальних теплових машин завжди менший від одиниці.

Вираз для К.К.Д. теплової машини, яка працює за циклом Карно, теж є одним із формулювань другого закону термодинаміки: **коефіцієнт корисної дії ідеальної теплової машини визначається лише температурами нагрівника і холодильника.**

Кельвін сформулював другий закон термодинаміки в такому вигляді: **неможливо побудувати теплову машину, яка перетворювала би в роботу теплоту найбільш холодного з тіл, що є в системі.**

Такою машиною могла би бути машина, яка перетворювала б в роботу теплоту води в океані. Якби відніманням теплоти і перетворенням її в роботу вдалось би понизити температуру всієї океанської води лише на $0,1\text{ K}$, то можна було би приводити в рух усі машини і верстати на земній кулі упродовж 1500 років. Така машина була би еквівалентна вічному двигуну, тому її називають вічним двигуном другого роду, на відміну від вічного двигуна першого роду, який повинен створювати роботу з нічого, без затрати енергії.

Вічний двигун першого роду протирічить закону збереження енергії; вічний двигун другого роду не протирічить закону збереження енергії, але він протирічить другому закону термодинаміки.

Другий закон термодинаміки вказує на необоротність процесу перетворення однієї форми передачі енергії - роботи - у другу форму передачі енергії - теплоту. Він стверджує, що процес переходу впорядкованого руху тіла як цілого в неупорядкований рух його частинок є необоротним. Упорядкований рух може переходити в неупорядкований без будь-яких додаткових процесів, як це відбувається, наприклад, при внутрішньому терті. Перехід же неупорядкованого руху частинок у впорядкований рух тіл можливий лише при умові, що він супроводжується будь-яким компенсуючим процесом.

У тепловій машині, що працює за прямим циклом, виконується робота за рахунок підведеної від нагрівника теплоти. Але при цьому частина отриманої теплоти передається холодильнику. Отже, робота за цикл не еквівалентна до підведеної теплоти.

У холодильній машині теплота передається від холодного тіла до гарячого. Проте для здійснення такого процесу необхідний компенсуючий процес виконання роботи зовнішніми силами.

2. Ентропія. Ентропія ідеального газу

Формулу К.К.Д. ідеальної теплової машини, що працює за циклом Карно:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

приведемо до вигляду:

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} ; \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} .$$

Відношення кількості переданої теплоти до температури тепловіддавача або теплоприймача $\frac{Q}{T}$ називається **зведеною кількістю теплоти**.

Під час виконання циклу Карно приведені теплоти при процесах ізотермічного розширення і стиску однакові.

Розглянемо деякий рівноважний цикл, що здійснюється по шляху $anb1$. Наведемо ряд нескінченно близьких адіабат, які перетинають лінії прямого a і зворотного b переходів (рис.35). Ці лінії розіб'ються на ряд нескінченно малих відрізків.

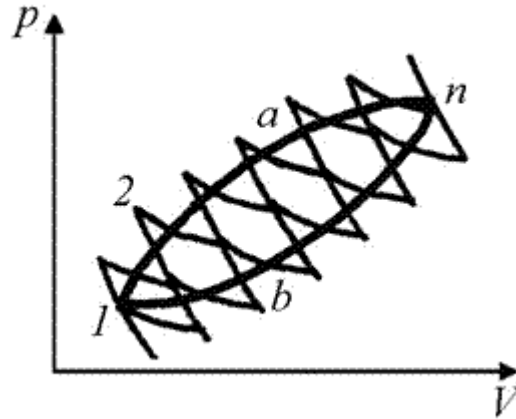


Рис.35.

Кожну з ліній a і b можна вважати такою, що складається з ряду нескінченно близьких ізоTERM, на яких робоче тіло одержує від ряду нагрівників, що знаходяться при температурах $T_{a1}, T_{a2}, \dots$ кількість теплоти $\delta Q_{a1}, \delta Q_{a2}, \dots$ віддає ряду холодильників, що знаходяться при температурах $T_{b1}, T_{b2}, \dots$ кількості теплоти $\delta Q_{b1}, \delta Q_{b2}, \dots$. До кожного циклу застосуємо формулу про рівність зведених кількостей теплоти:

$$\frac{\delta Q_{a1}}{T_{a1}} = \frac{\delta Q_{b1}}{T_{b1}}, \quad \frac{\delta Q_{a2}}{T_{a2}} = \frac{\delta Q_{b2}}{T_{b2}}, \dots$$

і додамо отримані вирази:

$$\sum_i \frac{\delta Q_{ai}}{T_{ai}} = \sum_i \frac{\delta Q_{bi}}{T_{bi}}.$$

Звідси *сума зведених кількостей теплоти не залежить від шляху переходу.*

Це положення *називається теоремою Клаузіса.*

У випадку необоротної теплової машини:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad \text{і} \quad \frac{Q_1}{T_1} < \frac{Q_2}{T_2}.$$

Тоді, об'єднавши формули для оборотної і необоротної теплових машин, маємо:

$$\frac{Q_1}{T_1} \leq \frac{Q_2}{T_2} \quad \text{і} \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0.$$

Домовимося кількість теплоти, яка віддана тілу нагрівником, вважати додатною, а кількість теплоти, віддану тілом холодильнику, - від'ємною. Тоді:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0,$$

причому "=" - відповідає оборотним переходам а "<" - необоротним.

В загальному вигляді:

$$\sum \frac{Q}{T} \leq 0$$

При неперервній зміні стану тіла можна вважати, що воно входить в теплообмін з неперервним рядом нагрівників і холодильників. Кожен з цих нагрівників і холодильників віддає робочому тілу або отримує від нього нескінченно малі кількості теплоти δQ . Тоді

сума $\sum \frac{Q}{T} \leq 0$ перетворюється в інтеграл $\oint \frac{Q}{T} \leq 0$.

Це співвідношення називається рівністю (нерівністю) Клаузіса.

Розглянемо оборотний цикл *1anb1* (рис.35). Запишемо рівність Клаузіса у вигляді суми двох інтегралів:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_{1a}^n \frac{\delta Q}{T} + \int_{nb}^1 \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Звідси:

$$\int_{1a}^n \frac{\delta Q}{T} = - \int_{nb}^1 \frac{\delta Q}{T} = \int_{1b}^n \frac{\delta Q}{T}$$

Незалежність інтегралу $\int_1^2 \frac{\delta Q}{T}$ від шляху оборотного переходу між станами 1 і 2 означає, що цей інтеграл виражає зміну деякої функції стану тіла. Підінтегральний вираз $\frac{\delta Q}{T}$ є повним диференціалом деякої функції, яка визначається лише станом системи і не залежить від шляху, яким система прийшла в цей стан. Отже,

$$\frac{\delta Q}{T} = dS$$

Функція стану, диференціал якої є $\frac{\delta Q}{T}$ називається ентропією S .

Згідно з визначенням зміна ентропії при оборотному процесі:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T}$$

де підінтегральний вираз і границі інтегрування треба виразити через величини, що характеризують досліджуваний процес. Ця формула визначає ентропію лише з точністю до адитивної сталої, тобто початок відліку ентропії довільний.

Кожний стан тіла характеризується певним значенням ентропії S , яка є повним диференціалом.

Ентропія - адитивна функція стану системи: ентропія системи дорівнює сумі ентропій всіх тіл, що входять в систему.

Розглянемо фізичний зміст ентропії.

Аналізуючи роботу машини, яка працює за циклом Карно, доходимо висновку, що К.К.Д. залежить від температури нагрівника. Наприклад, при однаковій температурі холодильників T_2 , але при різних температурах нагрівників T_1 і T_1' , причому $T_1 > T_1'$, отримаємо:

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad \eta_2 = 1 - \frac{T_2}{T_1'},$$

тобто $\eta_1 > \eta_2$.

Це означає, що при високій температурі передачі кількості теплоти робочому тілу ефективність теплової машини зростає, тобто більша кількість переданої теплоти перетворюється в роботу. З іншого боку, зміна ентропії залежить від температури. При вищій температурі нагрівника зростання ентропії буде меншим, ніж при низькій, оскільки температура входить у знаменник виразу для ентропії. Отже, більшому зростанню ентропії відповідає зменшення К.К.Д. Це означає, що цінність переданої нагрівником певної кількості теплоти δQ залежить від температури. Оскільки ентропія більше зростає при низьких температурах, зрозуміло, що великому зростанню ентропії відповідає мала цінність нагрівника. Отже, **ентропію можна розглядати як міру знецінення енергії тіла**. Ентропія - міра теплової непрацездатності тіла.

Розглянемо цикл $lanb1$, частина якого lan необоротна, вона здійснюється нерівноважним процесом, а частина nbl оборотна, виконується рівноважним

процесом. Тоді на основі $\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$ можна записати:

$$\int_{lanb1} \frac{\delta Q}{T} + \int_{nbl} \frac{\delta Q}{T} < 0; \quad \int_{lanb1} \frac{\delta Q}{T} < \int_{nbl} \frac{\delta Q}{T},$$

тобто інтеграл від $\frac{\delta Q}{T}$ по необоротному шляху завжди менший від інтеграла по оборотному шляху між тими ж станами.

$$\text{Але } \int_{lanb1} \frac{\delta Q}{T} = S_n - S_l, \quad \int_{nbl} \frac{\delta Q}{T} < S_n - S_l.$$

При необоротному процесі $\int_{lanb1} \frac{\delta Q}{T}$ менший зміни ентропії в даному процесі. Тоді:

$$S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}.$$

Для оборотного рівноважного циклу зміна ентропії:

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Якщо система виконує необоротний цикл, то ентропія системи зростає: $\Delta S > 0$.

Ентропія замкненої системи може або зростати, або залишатися постійною.

Оскільки реальні процеси необоротні, то всі процеси в замкненій системі ведуть до збільшення її ентропії - у цьому полягає принцип зростання ентропії. Цей принцип лежить в основі формулювання **другого закону термодинаміки: можливі лише такі процеси, що відбуваються в макроскопічній системі, які ведуть до збільшення її ентропії.**

Знайдемо зміну ентропії у процесах ідеального газу. Оскільки:

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT$$

$$\delta A = p dV = \frac{m}{\mu} R T \frac{dV}{V},$$

то

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{m}{\mu} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} \left(C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right).$$

Зміна ентропії $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$ ідеального газу при переході його з стану 1 у стан 2 не залежить від виду процесу переходу $1 \rightarrow 2$.

При адіабатному процесі $\delta Q = 0$ і $\Delta S \geq 0$.

Для оборотного адіабатного процесу зміна ентропії дорівнює 0, для необоротного $S_2 > S_1$ - ентропія тіла зростає.

Оборотний адіабатний процес – ізоентропічний процес.

При ізотермічному процесі $T_1 = T_2$ і зміна ентропії:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

При ізохорному процесі $V_1 = V_2$ і зміна ентропії:

$$\Delta S = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

1. Коловий процес. Теплові двигуни і холодильні машини. Оборотні і необоротні процеси

Коловим процесом (циклом) називається процес, при якому система, пройшовши через ряд станів, повертається у вихідний стан. На діаграмі процесів цикл зображається замкненою кривою.

Тіло, яке здійснює коловий процес і обмінюється енергією з іншими тілами, називається робочим тілом. Звичайно таким тілом є газ.

Цикл, який виконує ідеальний газ, можна розбити на процеси розширення $(1-2)$ і стискування $(2-1)$ газу (рис.30). Робота розширення, яка визначається площею

фігури $1a2V_2V_11$, додатна ($dV > 0$), робота стискування, що визначається площею фігури $2b1V_1V_22$, від'ємна ($dV < 0$). Робота, яка виконується газом за цикл:

$$A = \int_{1a}^2 p dV + \int_{2b}^1 p dV = A_{1-2} - A_{2-1}$$

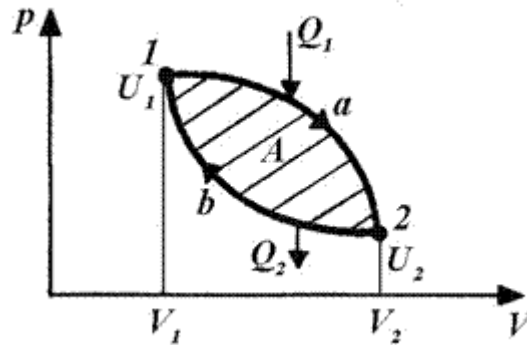


Рис.30.

Ця робота визначається заштрихованою площею, що охоплюється кривою $1a2b1$.

Якщо за цикл виконується додатна робота $A > 0$ (цикл виконується за годинниковою стрілкою), то він називається прямим.

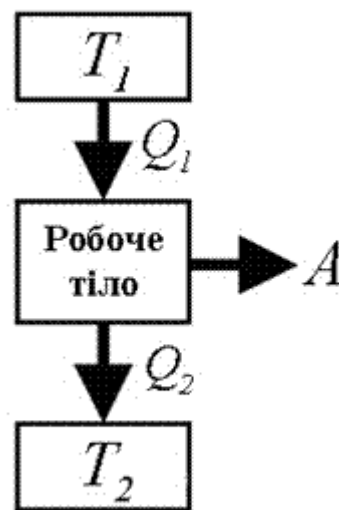
При прямому циклі робочому тілу, надається кількість теплоти Q_1 і тіло виконує роботу розширення A_{1-2} . Внутрішня енергія змінюється на величину $\Delta U = U_2 - U_1$, де U_1 і U_2 - внутрішня енергія тіла в стані 1 і 2, відповідно. Потім тіло стискається, над ним виконується робота $A'_{2-1} = -A_{2-1}$, яка менша, ніж A_{1-2} , і від нього забирається кількість теплоти Q_2 , яка менша Q_1 . Внутрішня енергія змінюється на величину $-\Delta U$. Робота стискування виконується за рахунок використання частини роботи виконаної при розширенні робочого тіла, наприклад, за рахунок кінетичної енергії маховика, що почав обертатись при розширенні робочого тіла. За першим законом термодинаміки для процесу розширення $Q_1 = \Delta U + A_{1-2}$, для процесу стискання: $-Q_2 = -\Delta U - A_{2-1}$.

Якщо ці рівняння додати, то отримаємо:

$$Q_1 - Q_2 = A_{1-2} - A_{2-1} = A$$

Після закінчення циклу тіло повертається в свій початковий стан, внутрішня енергія тіла не змінюється. Тому робота циклу може виконуватись лише за рахунок зовнішніх джерел, що підводять до тіла теплоту.

Прямий цикл використовується в **тепловому двигуні**, в якому робоче тіло отримує енергію у формі теплоти від зовнішніх джерел і частину її віддає у формі роботи. Тепловий двигун складається з трьох частин: нагрівник, робоче тіло, холодильник (рис.31). Від термостата з вищою температурою T_1 , який називається нагрівником, за цикл відбирається кількість теплоти Q_1 , а термостату з нижчою температурою T_2 , який називається холодильником, за цикл передається кількість теплоти Q_2 , і виконується робота A .



$$A = Q_1 - Q_2$$

Рис.31.

Тепловий двигун характеризується коефіцієнтом корисної дії η , який дорівнює відношенню роботи A , яка виконана тілом за цикл роботи, до кількості теплоти Q_1 , що отримало тіло від нагрівника:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

Температура газу при його стискуванні повинна бути нижча, ніж при розширенні. Тоді тиск газу у всіх проміжних станах при стиску буде менший, ніж при розширенні, і буде виконано умову $A_{1-2} > A_{2-1}$, необхідну при виконанні двигуном корисної роботи.

Якщо здійснити цикл проти годинникової стрілки, то робота буде та сама за абсолютною величиною, але від'ємна (рис.32):

$$A = \int_{1b}^2 p dV + \int_{2a}^1 p dV = - \left[\int_{2b}^1 p dV + \int_{1a}^2 p dV \right] = -A$$

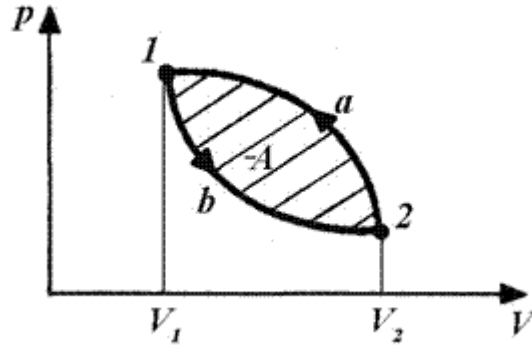


Рис.32.

Такий процес називається *зворотним*.

Зворотний цикл використовується в *холодильних машинах* – періодично діючих установках, в яких за рахунок роботи зовнішніх сил теплота переноситься до тіла з вищою температурою (рис.33).

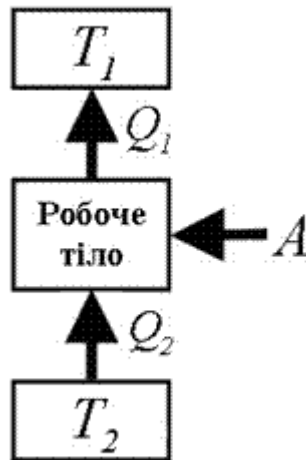


Рис.33.

Така машина забирає за цикл від тіла з температурою T_2 кількість теплоти Q_2 і віддає тілу при температурі T_1 кількість теплоти Q_1 . Над машиною за цикл повинна бути виконана робота A . Кількість відданої теплоти Q_1 дорівнює сумі отриманої кількості теплоти Q_2 і роботи, яку виконали зовнішні сили:

$$Q_1 = Q_2 + A.$$

Отже, чистий результат циклу полягає в тому, що тіло з меншою температурою, від якого забирається певна кількість теплоти, охолоджується, а тіло з вищою температурою, якому віддається теплота, нагрівається.

Ефективність холодильної машини характеризується її холодильним коефіцієнтом, який дорівнює відношенню віднятої кількості теплоти Q_2 до роботи, яка затрачається на приведення машини в роботу:

$$\eta_{х.м.} = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}.$$

Робочим тілом в холодильній машині слугують пари рідин, які легко киплять: аміак, фреон і ін. Енергія підводиться до машини від електричної мережі. За рахунок цієї енергії відбувається перехід теплоти від холодильної камери до більш нагрітого тіла - до навколишнього середовища.

Оборотним термодинамічним процесом називається така зміна стану системи, яка, будучи проведена у зворотному напрямку, повертає її в початковий стан так, щоб система пройшла через ті самі проміжні стани, що і у прямому процесі, але у зворотній послідовності, а стан тіл поза системою залишився незмінним.

Необоротним називається процес, коли зворотний перехід через ті самі проміжні стани неможливий.

Будь-який рівноважний процес є оборотним.

Оборотні процеси - це до деякої міри ідеалізація реальних процесів. Всі реальні процеси є необоротними.

2. Цикл Карно і його коефіцієнт корисної дії для ідеального газу

Розглянемо коловий процес, в результаті якого тепло, відняте від якогось тіла, можна перетворити в роботу і притому якнайкраще.

Теорема Карно: із всіх періодично діючих теплових машин, що мають однакові температури нагрівачів і холодильників, найбільший К.К.Д. мають оборотні машини; при цьому К.К.Д. оборотних машин, що працюють при однакових температурах нагрівачів і холодильників, дорівнюють один одному і не залежать від конструкції машини.

Цикл Карно складається з двох ізотерм і двох адіабат (рис.34).

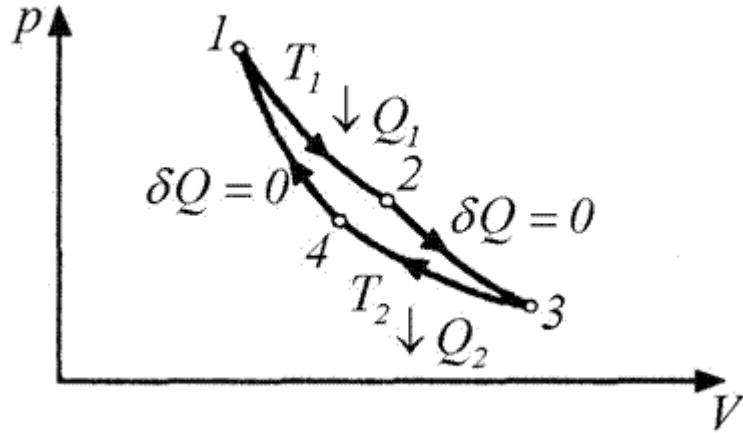


Рис.34

Ізотермічне розширення і стиск задані відповідно кривими $1-2$ і $3-4$, адіабатне розширення і стиск - кривими $2-3$ і $4-1$. Для виконання циклу Карно необхідні термостат з температурою T_1 (нагрівник) і термостат з температурою T_2 (холодильник), причому $T_1 > T_2$. При проходженні адіабатних ділянок циклу система повинна бути термоізованою від навколишнього середовища.

Визначимо К.К.Д. циклу Карно.

При ізотермічному процесі $\Delta U = 0$ і робота розширення газу A_{12} дорівнює кількості теплоти Q_1 , що отримав газ від нагрівника:

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1$$

При адіабатному розширенні робота виконується за рахунок зміни внутрішньої енергії:

$$A_{23} = -\frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1)$$

При ізотермічному стисканні газу виконується робота A_{34} і газ віддає холодильнику кількість теплоти Q_2 :

$$A_{34} = \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2$$

Робота адіабатного стискання:

$$A_{41} = -\frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2) = -A_{23}$$

В результаті колового циклу виконується робота:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2$$

Термічний К.К.Д. циклу Карно:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Використаємо рівняння адіабат $2-3$ і $4-1$:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \quad T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1};$$

$$\frac{T_1 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = \frac{T_2 V_3^{\gamma-1}}{T_2 V_4^{\gamma-1}}.$$

Звідси:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Тоді:

$$\eta = \frac{\frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{\frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}}{\frac{m}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Отже:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Для циклу Карно К.К.Д. визначається лише температурами нагрівника і холодильника.

Довільна реальна машина втрачає деяку кількість теплоти через теплообмін з навколишнім середовищем, що знаходиться при нижчій температурі. Позначимо цю втрату теплоти Q_3 . Крім того, на подолання сил тертя, які існують у всякій реальній машині, тратиться деяка кількість теплоти Q_4 .

Отже, робота реальної машини:

$$A = Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_4 = Q_1 - Q'_2,$$

де

$$Q'_2 = Q_2 + Q_3 + Q_4$$

Формула коефіцієнта корисної дії реальної теплової машини має вигляд:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

7. Основні поняття і формули до теми

Коловий процес (цикл)	Процес, при якому система, пройшовши через ряд станів, повертається у вихідний стан
Прямий цикл	Якщо за цикл виконується додатна робота $A > 0$ (цикл виконується за годинниковою стрілкою)
Зворотній цикл	Якщо здійснити цикл проти годинникової стрілки, то робота буде та сама за абсолютною величиною, але від'ємна
Тепловий двигун	Двигун, в якому робоче тіло отримує енергію у формі теплоти від зовнішніх джерел і частину її віддає у формі роботи. Тепловий двигун складається з трьох частин: нагрівник, робоче тіло, холодильник
Коефіцієнт корисної дії теплового двигуна	$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$
Холодильна машина	Періодично діюча установка, в якій за рахунок роботи зовнішніх сил теплота переноситься до тіла з вищою температурою
Оборотний термодинамічний процес	Така зміна стану системи, яка, будучи проведена у зворотному напрямку, повертає її в початковий стан так, щоб система пройшла через ті самі проміжні стани, що і у прямому процесі, але у зворотній послідовності, а стан тіл поза системою залишився незмінним
Необоротний термодинамічний процес	Процес, коли зворотний перехід через ті самі проміжні стани неможливий
Теорема Карно	Із всіх періодично діючих теплових машин, що мають однакові температури нагрівачів і холодильників, найбільший К.К.Д. мають оборотні машини; при цьому К.К.Д. оборотних машин, що працюють при однакових температурах нагрівачів і холодильників, дорівнюють один одному і не залежать від конструкції машини
Цикл Карно	Складається з двох ізотерм і двох адіабат
Коефіцієнт корисної дії циклу Карно	К.К.Д. визначається лише температурами нагрівника і холодильника: $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$

§70 Нерівність і рівність Клаузіуса. Ентропія. Закон зростання ентропії [8]

1. З першої та другої теореми Карно випливає цікавий наслідок. Розглянемо частинний випадок теплової машини, під час роботи якої робоче тіло отримує від нагрівача з температурою T_1 кількість теплоти Q_1 і це ж робоче тіло віддає холодильнику з температурою T_2 кількість теплоти Q_2 . Відповідно до другої теореми Карно, коефіцієнт

корисної дії будь-якої теплової машини не може бути більшим за коефіцієнт корисної дії ідеальної теплової машини, яка працює за циклом Карно з тими самими температурами нагрівача та холодильника. Тому можемо записати

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (70.1)$$

Співвідношення (70.1) можна перетворити

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad \text{або} \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \quad (70.2)$$

Далі не будемо розрізняти, який тепловий резервуар є нагрівачем, а який – холодильником. Кількість теплоти, яка віддається тепловим резервуаром, будемо вважати додатною, кількість теплоти, яка передається тепловому резервуару – від’ємною. Завдяки цьому остання формула (70.1) набуває симетричного вигляду

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \quad (70.3)$$

Можна провести узагальнення формули (70.3) на будь-який круговий тепловий процес.

Виділимо малу ділянку такого процесу. Позначимо через δQ кількість теплоти, яка була передана робочому тілу на цій ділянці. Температуру резервуару на цій ділянці позначимо через T . Тоді відповідно з (70.3) сума відношень $\delta Q/T$ на всіх ділянках кругового процесу повинна бути додатною

$$\sum_i \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_i \leq 0$$

Виходячи з визначення інтеграла, цю нерівність можна записати у вигляді

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad (70.4)$$

Нерівність (70.4), яка є вірною для будь-якого кругового процесу, отримала назву нерівність Клаузіуса.

2. Припустимо, що круговий процес, який виконується системою є квазістатичним.

Нерівність Клаузіуса (70.4) є справедливою й для такого процесу. Слід зазначити, що у випадку квазістатичного процесу температура теплового резервуару та системи однакові.

Квазистатичний процес оборотний. Тому він може йти в протилежному напрямку. Для

зворотного процесу також є справедливою нерівність Клаузіуса $\int \frac{\delta Q}{T} \leq 0$, де

через δQ позначили елементарні кількості теплоти, які отримуються системою на окремих ділянках такого зворотного процесу. Через те, що при цьому система проходить через ті ж

рівноважні стани, що й у прямому процесі, то $\delta Q = -\delta Q$ і тому $\int \frac{\delta Q}{T} \geq 0$. Це співвідношення сумісне зі співвідношенням (70.4) тільки в тому випадку, коли взяти знак рівності. Таким чином, для квазистатичного процесу нерівність Клаузіуса переходить у рівність

$$\boxed{\int \frac{\delta Q}{T} = 0} \quad (70.5)$$

Це співвідношення отримало назву рівності Клаузіуса.

3. На рівності Клаузіуса засноване введення фундаментального в термодинаміці поняття ентропії.

Нехай система може переходити з початкового стану 1 (рис. 70.1) у кінцевий стан 2 декількома способами, кожний з яких є квазистатичним процесом. Візьмемо два з них – I і II. Ці процеси можна об'єднати в один квазистатичний круговий процес 1–I–2–II–1. Застосуємо до нього рівність Клаузіуса:

$$\int_{12} \frac{\delta Q}{T} + \int_{21} \frac{\delta Q}{T} = 0,$$

або

$$\int_{12} \frac{\delta Q}{T} - \int_{12} \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Зауважимо, що в цій рівності ми поміняли знак через те, що змінили межі інтегрування на обернені. Тоді

$$\boxed{\int_{12} \frac{\delta Q}{T} = \int_{12} \frac{\delta Q}{T}}$$

Кількість теплоти, що отримується системою, і яка поділена на абсолютну температуру T , при якій ця теплота була отримана, іноді називають приведеною кількістю теплоти.

Величина $\delta Q/T$ є елементарною приведеною кількістю теплоти, що отримується в

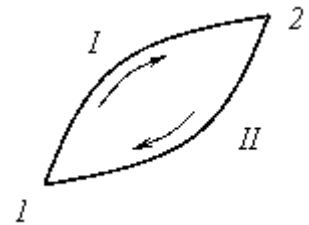


Рисунок 70.1

нескінченно малому процесі, а інтеграл $\int \frac{\delta Q}{T}$ можна назвати приведеною кількістю теплоти, що отримується в скінченному процесі. Користуючись цією термінологією, рівності Клаузіуса (70.5) можна дати таке формулювання: приведена кількість теплоти, яка отримується системою при будь-якому квазістатичному круговому процесі, дорівнює нулю. Еквівалентною є таке формулювання: приведена кількість теплоти, що квазістатично отримана системою, не залежить, від шляху переходу, а визначається лише початковим і кінцевим станами системи. Цей важливий результат дозволяє ввести нову функцію стану, яку називають ентропією.

Ентропія системи є функція її стану, що визначається з точністю до довільної сталої. Різниця ентропії у двох рівноважних станах 2 і 1 за визначенням дорівнює приведений кількості теплоти, яку потрібно передати системі, щоб перевести її зі стану 1 у стан 2 будь-яким квазістатичним способом. Таким чином, якщо ентропії в станах 1 і 2 позначити буквами S_1 й S_2 , то за визначенням

$$\boxed{S_2 - S_1 = \int_{1 \rightarrow 2} \frac{\delta Q}{T}} \quad (70.6)$$

Значення довільної сталої, до якої визначена ентропія, тут не відіграє ніякої ролі. Фізичний зміст має не сама ентропія, а лише різниця ентропії.

4. Припустимо, що система переходить із рівноважного стану 1 у рівноважний стан 2 (рис. 70.2), але процес переходу є необоротним – на рисунку він зображений штриховою лінією I. Повернемо систему зі стану 2 у вихідний стан 1 квазістатично по будь-якому шляху II. На підставі нерівності Клаузіуса можна написати

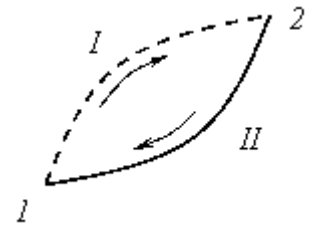


Рисунок 70.2

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_I \frac{\delta Q}{T} + \int_{II} \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

Через те, що процес II квазістатичний

$$\int_{II} \frac{\delta Q}{T} = S_1 - S_2$$

Тому нерівність Клаузіуса набуває вигляду

$$S_2 - S_1 \geq \int_{1 \rightarrow 2} \frac{\delta Q}{T} \quad (70.7)$$

Тут під **T** потрібно розуміти температуру навколишнього середовища, при якій воно віддає системі кількість теплоти **δQ** .

Якщо система адіабатично ізольована, то **$\delta Q = 0$** , й інтеграл у (70.7) стає таким, що дорівнює нулю. Тоді

$$\boxed{S_2 - S_1 = \Delta S \geq 0} \quad (70.8)$$

Таким чином, ентропія адіабатично ізольованої системи не може зменшуватися: вона або зростає, або залишається сталою. Це твердження є формулюванням закону зростання ентропії. По суті це є ще одне формулювання другого закону термодинаміки.

Третє начало термодинаміки

Теплова теорема Нернста

Численні дослідження структури різних речовин прямими дифракційними методами та за допомогою фізико-хімічного аналізу показали, що зі зниженням температури термодинамічні системи переходять у більш впорядкований стан. Можна припустити, що впорядкований стан відповідає меншій енергії частинок, що утворюють тіло, але впорядкуванню при високих температурах заважає тепловий рух частинок.

Розупорядкування системи супроводжується збільшенням ентропії системи, яка є мірою хаосу у системі, отже, природно припустити, що із зменшенням температури до абсолютного нуля і збільшенням впорядкованості системи ентропія буде зменшуватись.

У зв'язку із цим виникає цілий ряд питань :

- Яким буде найменше значення ентропії ?
- Як буде вести себе тіло при абсолютному нулі, якщо б над ним виконувалась робота (наприклад, змінили тиск) ?
- Чи може змінюватись ентропія тіла, що знаходиться при абсолютному нулі температури ?

Як друге начало термодинаміки тісно пов'язане з ім'ям Людвіга Больцмана, так третє начало пов'язують з ім'ям німецького фізика і хіміка Вальтера Нернста. Аналізуючи поведінку тіл при низьких температурах поблизу абсолютного нуля, Нернст сформулював теорему, яка має назву тепловий закон Нернста або теорема Нернста і стала основою третього начала термодинаміки :

Теорема Нернста (тепловая теорема Нернста) — утверждение, являющееся одной из формулировок **третьего начала термодинамики**, сформулированное **Вальтером Нернстом** в 1906 году как обобщение экспериментальных данных по термодинамике гальванических элементов.

Теорема Нернста утверждает, что всякий термодинамический процесс, протекающий при фиксированной температуре T в сколь угодно близкой к нулю, $T < T_0 \rightarrow 0$, не должен сопровождаться изменением энтропии S , то есть изотерма $T = 0$ совпадает с предельной адиабатой S_0 .

Существует несколько формулировок теоремы, которые эквивалентны между собой:

- Энтропия S любой системы при абсолютном нуле температуры: $T = 0$, является универсальной постоянной S_0 , не зависящей ни от каких переменных параметров (давления, объема и т. п.).
- При приближении к абсолютному нулю, $T \rightarrow 0$, энтропия S стремится к определенному конечному пределу S_0 , не зависящему от конечного состояния системы.
- При приближении к абсолютному нулю, $T \rightarrow 0$, приращение энтропии ΔS не зависит от конкретных значений термодинамических параметров состояния системы и стремится к вполне определенному конечному пределу.
- Все процессы при абсолютном нуле, $T = 0$, при которых система переходит из одного равновесного состояния в другое, происходят без изменения энтропии.

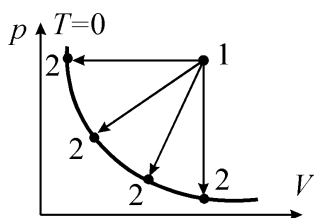
Выбор универсальной постоянной S_0 , равной энтропии при $T = 0$, произволен. Условились энтропию всякой равновесной системы при абсолютном нуле температур считать равной нулю: $S_0 = 0$.

Макс Планк в 1910 году сформулировал более жесткое утверждение: величина S_0 была конечной и $S_0 = 0$. В формулировке Планка теорема Нернста имеет вид начального (граничного или предельного) условия для системы дифференциальных уравнений определяющих энтропию: При выключении температуры, $T \rightarrow 0$, энтропия термодинамической системы также стремится к нулю:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S(T, V, a, N) = 0.$$

Справедливость теоремы Нернста может быть доказана лишь опытной проверкой следствий этой теоремы.

При прямуюванні температури до абсолютного нуля зміна ентропії прямує до деякої кінцевої межі, яка не залежить від значень параметрів, що визначають рівноважний стан системи.



Тобто межа, до якої прямує

$$\lim_{T \rightarrow 0} \int_{T_1}^T \frac{\delta Q}{T}$$

не залежить від кінцевого стану системи. Нернст стверджував, що переходи від стану 1 у стани 2 поблизу абсолютного нуля абсолютно рівноцінні.

З такого формулювання випливає, що при $T \rightarrow 0$ процеси, що переводять систему із одного рівноважного стану у інший, протікають без зміни ентропії. Це твердження можна записати у вигляді так званого рівняння Нернста

$$\lim_{T \rightarrow 0} (S_2 - S_1) = \lim_{T \rightarrow 0} \Delta S = 0.$$

Макс Планк постулював, що ентропія усіх тіл незалежно від їх фізико-хімічної природи та індивідуальних властивостей при абсолютному нулі температури набуває однакового значення, рівного нулю. Рівняння

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$$

називається рівнянням Планка. Воно загальніше, ніж рівняння Нернста, оскільки рівняння Нернста випливає з нього.

Зваживши на рівняння Планка, теорему Нернста можна сформулювати так :

При наближенні до абсолютного нуля температури ентропія усіх тіл прямує до нуля.

Теорему треба доводити. Теорема Нернста доводиться у один рядок. Згадаймо знамениту формулу Больцмана

$$S = k \ln G.$$

Що таке G ? Це статистична вага, тобто кількість рівноімовірних мікростанів, через які може бути реалізований даний макростан. Чому виникають різні мікростани ? Внаслідок теплового руху молекул. Який може бути тепловий рух при абсолютному нулі температур ? При $T \rightarrow 0$ виморожуються всі ступені вільності : поступальні, обертальні, коливальні

(залишаються лише так звані нульові коливання з енергією $\frac{\hbar \omega}{2}$, але їх енергія така мала, що ними зазвичай нехтують). Отже при $T = 0$ система знаходиться у одному-єдиному стані, статистична вага якого $G = 1$. Звідси $\ln G = 0$, і $S = 0$.

Розглянемо процес охолодження деякої системи. Будемо вважати, що ентропія є функцією об'єму і температури $S = S(T, V)$. Здійснимо ізохорне охолодження моля ідеального газу від температури T_1 до температури T_2 , причому обидві температури наближені до абсолютного нуля. Робота при такому процесі не виконується, тому вся кількість теплоти δQ йде на зміну внутрішньої енергії $dU = C_V dT$. Тоді зміна ентропії становитиме

$$\Delta S = S(T_2, V) - S(T_1, V) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_V dT}{T}.$$

Таке ж зниження температури від T_1 до T_2 можна отримати адіабатним розширенням газу від об'єму V до об'єму $V + \Delta V$. Адіабатний процес є ізентропійним, тому

$$S(T_1, V) = S(T_2, V + \Delta V),$$

або, скориставшись попереднім рівнянням,

$$S(T_2, V + \Delta V) = S(T_2, V) - \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_V dT}{T} = S(T_2, V) + \int_{T_2}^{T_1} \frac{C_V dT}{T}.$$

Нас цікавить процес наближення до абсолютного нуля, отже, покладемо $T_2 = 0$:

$$S(0, V + \Delta V) = S(0, V) + \int_0^{T_1} \frac{C_V dT}{T}.$$

>0

Другий доданок є величиною додатною, тому отримуємо

$$S(0, V + \Delta V) > S(0, V),$$

тобто при абсолютному нулю температури

$$\Delta S_{T \rightarrow 0} > 0.$$

До чого ми прийшли ? Отримавши при охолодженні системи температуру абсолютного нуля $T = 0$, ми отримали суперечність із постулатом третього начала термодинаміки – поблизу абсолютного нуля ентропія не може зростати, процеси йдуть без зміни ентропії, рівної нулю.

Отже, постулат третього начала термодинаміки можна сформулювати і як принцип недосяжності абсолютного нуля.

А це, у свою чергу призводить до висновку про неможливість створення машини, холодильника якої має температуру $T_2 = 0$. Дійсно, припустивши можливість існування такого холодильника, ми отримаємо к.к.д. такої машини, що працює за оборотним циклом

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{T_1}{T_1} = 1.$$

Це означає, що вся теплота, отримана від нагрівача перетворюється у механічну роботу, а це суперечить другому началу термодинаміки.

Теплову машину з холодильником при температурі абсолютного нуля називають вічним двигуном третього роду. Отже, постулат третього начала термодинаміки можна сформулювати і як неможливість створення вічного двигуна третього роду.

Наслідки із третього начала термодинаміки

1. Із третього начала термодинаміки випливає, що коли температура прямує до абсолютного нуля, будь-яка теплоємність прямує до нуля.

Справді, давайте спочатку розглянемо ізольовану систему. Будемо змінювати її температуру ізохорно ($V = \text{const}$). Тоді за означенням теплоємності $C = \frac{\delta Q}{dT}$, отже при ізохорному процесі

$$\delta Q = C_V dT.$$

За означенням ентропії

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{C_V dT}{T},$$

або зміна ентропії

$$S - S_0 = \int_{T_0}^T \frac{C_V dT}{T}.$$

Врахувавши формулювання третього начала термодинаміки, скористаємось рівнянням Планка

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = \int_{T_0}^0 \frac{C_V dT}{T} + S_0 = 0, \quad \text{звідки} \quad S_0 = \int_0^{T_0} \frac{C_V dT}{T}.$$

Отже, для ентропії отримаємо

$$S = S_0 + \int_{T_0}^T \frac{C_V dT}{T} = \int_0^{T_0} \frac{C_V dT}{T} + \int_{T_0}^T \frac{C_V dT}{T} = \int_0^T \frac{C_V dT}{T},$$

або остаточно

$$S = \int_0^T \frac{C_V dT}{T}.$$

Аналогічно можна отримати для ізобарного процесу

$$S = \int_0^T \frac{C_p dT}{T}.$$

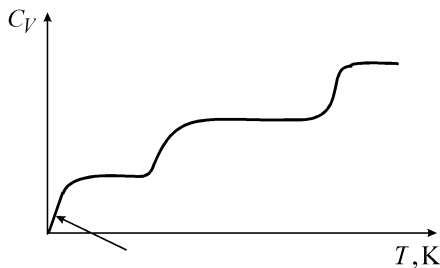
Такі співвідношення дають можливість за відомими значеннями C_p і C_V визначити як абсолютні значення ентропії, так і її температурну залежність.

Давайте переписемо теплоємності для рівноважних процесів у такому вигляді

$$C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{T \partial S}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial \ln T} \right)_V \quad \text{і} \quad C_p = \left(\frac{\partial S}{\partial \ln T} \right)_p.$$

Якщо $T \rightarrow 0$, то $\ln T \rightarrow -\infty$, а ентропія, згідно із третім началом термодинаміки, прямує до деякої скінченної межі (мається на увазі, що не нуль, щоб не вийшла невизначеність). Тому при температурі $T = 0$

$$C_p = C_V = 0.$$



Початкова ділянка на залежності $C_V(T)$ побудована саме на основі наслідків із третього начала термодинаміки.

А як бути із співвідношенням Роберта Майєра $C_p = C_V + R$? Тут немає суперечності, оскільки співвідношення Майєра отримане для ідеального газу, а ми з вами вже обговорювали, що реальний газ наближається до ідеального лише при дуже високих температурах

2. При температурі абсолютного нуля ($T = 0$) адіабата співпадає з ізотермою. Дійсно, прямування до нуля теплоємностей призводить до того, що показник адіабати $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ прямує

до одиниці (невизначеність типу $\frac{0}{0}$), тому рівняння ізотерми $pV = \text{const}$ співпадає із рівнянням адіабати $pV^{\gamma=1} = \text{const}$.

На цьому ми завершуємо розгляд трьох начал термодинаміки. Ви повинні пам'ятати, що перше начало термодинаміки справедливе завжди, а друге і третє – для систем достатньо великої кількості частинок та коли ми не екстраполюємо його на Всесвіт.

Ентропія і невідпорядкованість (статистичний характер другого закону термодинаміки)

Відстежуючи шлях перетворення енергоресурсів планети в зручні для використання види енергії, бачимо, що частина теплоти через другий закон термодинаміки не може бути перетворена в роботу і має бути відведена у навколишнє середовище. Інші види енергії (механічна, електрична та ін.) також зрештою перетворюються на теплоту з низькою температурою, яка розсіюється в навколишньому середовищі. Вся енергія від згоряння палива на Землі (приблизно 14 млрд.т у. п. на рік на початок ХХІ століття) йде врешті-решт на нагрівання суші, океану, повітря і випромінювання тепла в космос.

Такий перехід в теплоту з низькою температурою означає збільшення невідпорядкованості в русі молекул. Навіть коли теплота зберігається, наприклад при змішуванні гарячого і холодного повітря, невідпорядкованість все одно зростає: *група швидких молекул в одній області + група повільних в іншій* перетворюються на *суміш молекул з проміжним хаотичним рухом*. Як розгляд простого змішування гарячого і холодного газу, так і загальнотеоретичне вивчення теплових машин (термодинаміки) приводять до висновку, що природною тенденцією є збільшення невідпорядкованості з перебігом часу. Фізичною мірою «невідпорядкованості» виступає ентропія. Говорять: «ентропія Всесвіту прагне зростати». Звідси виникла думка про «теплову смерть» Всесвіту, коли все знаходитиметься при одній і тій же низькій температурі та максимальній невідпорядкованості речовини.

Такого висновку дійшов Р. Клаузіус у 1865 році, перенісши висновки про односторонню спрямованість теплових процесів у земних умовах на весь Всесвіт.

Молекули газу в процесі зіткнень в принципі могли б розсортуватися на швидкі (гарячі) в одній частині посудини і повільні (холодні) – в іншій. Це означало б зменшення невідпорядкованості на противагу тому, що передбачає закон зростання ентропії. Але така випадкова подія майже неймовірна – не неможлива, а просто вкрай маловірогідна. Найбільш ймовірні невідпорядковані розташування і швидкості молекул, так що впорядковане розташування після декількох зіткнень з великою вірогідністю знову стає хаотичним. Виникнення порядку дуже малоймовірне навіть впродовж досить тривалого часу, невідпорядкованості ж – дуже ймовірне, ось чому ентропію можна визначити трьома еквівалентними способами: як міру невідпорядкованості; через теплоту і температуру; через вірогідність конфігурацій молекул (наскільки вони статистично ймовірні).

Другий закон термодинаміки по суті свідчить: ентропія прагне зростати. Внаслідок неминучих процесів, таких як втрати тепла, тертя, непружні зіткнення, вона збільшується. Максимум, на що ми можемо сподіватися у *разі безперервно працюючої довершеної теплової машини*, – це *збереження ентропії постійною*. З використанням законів статистичної фізики і теорії ймовірностей були розглянуті системи (тіла) як сукупність множини частин, що безладно рухаються, і встановлений взаємозв'язок між ентропією і так званою *термодинамічною ймовірністю* (число мікростанів, що реалізують даний макростан). Показано, що найбільшим число можливих мікростанів, що визначають даний стан тіла, буде, якщо молекули рівномірно розподілені за всім його обсягом. У таких випадках прийнято говорити про максимальну термодинамічну ймовірність даного стану і називати його *рівноважним*.

Перебіг самочинних термодинамічних процесів (наприклад теплообміну між тілами) в одному напрямі відображає прагнення системи перейти від станів нерівноважних, малої ймовірності до станів рівноважних, ймовірніших. Цим і пояснюється необоротність самочинних термодинамічних процесів, в результаті яких термодинамічна ймовірність стану системи зростає.

У зв'язку з цим австрійський фізик Л. Больцман (1844–1906) так сформулював другий закон термодинаміки: *всі процеси в природі прямують від станів, менш ймовірних, до станів, більш ймовірних*. Зростання ентропії ізольованої системи при перебігу необоротних самочинних термодинамічних процесів і одночасне збільшення термодинамічної ймовірності дають підстави вважати, що ентропія S і термодинамічна ймовірність ω – величини взаємозв'язані. Цей зв'язок їх виражається наступним рівнянням:

$$S = k \ln \omega,$$

де k – постійна Больцмана.

Таким чином, статистичний метод показує, що ентропія є мірою ймовірності стану системи і що висновки про зростання ентропії застосовні лише для систем, що складаються з великої кількості частинок.

Приклад розв'язування задач за теми

№ 2.243

Теплова машина, що працює за циклом Карно, за один цикл виконує роботу $A = 28,05$ кДж. Визначити ККД η циклу, кількість теплоти Q_1 та Q_2 відповідно одержаної від нагрівника і переданої холодильнику за один цикл, якщо температура нагрівника $t_1 = 150^\circ\text{C}$, холодильника $t_2 = 10^\circ\text{C}$.

Відп.: $\eta = 33\%$; $Q_1 = 85$ кДж; $Q_2 = 57$ кДж.

$$\begin{array}{l|l} A = 28,05 \text{ кДж} & 28,05 \cdot 10^3 \text{ Дж} \\ t_1 = 150^\circ\text{C} & T_1 = 423 \text{ K} \\ t_2 = 10^\circ\text{C} & T_2 = 283 \text{ K} \end{array}$$

$$\eta = ?$$

$$Q_1, Q_2 = ?$$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}; \quad \eta = \frac{423 - 283}{423} = 0,33 = 33\%$$

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{A}{\eta}; \quad Q_1 = \frac{28,05 \cdot 10^3}{0,33}$$

$$Q_1 = 85 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 85 \text{ кДж}$$

$$A = Q_1 - Q_2$$

$$Q_2 = Q_1 - A$$

$$Q_2 = 85 \cdot 10^3 - 28,05 \cdot 10^3 = 57 \cdot 10^3 \text{ Дж}$$

$$Q_2 = 57 \text{ кДж}$$

Лекція № 9

Тема: Закон збереження електричного заряду. Закон Кулона. Електричне поле. Напруженість електричного поля. Принцип суперпозиції електричних полів. Лінії напруженості електричного поля. Потік вектора напруженості. Теорема Остроградського-Гаусса для

електростатичного поля у вакуумі та в діелектрику. Застосування теореми Остроградського-Гаусса для розрахунку електричних полів.

Мета: ознайомити з сучасною точкою зору на поняття «електричний заряд», «величина заряду», «взаємодія зарядів». Пояснити електризацію тіл на основі електронної теорії.

Сформулювати поняття про електричне поле і його силову характеристику – напруженість електричного поля, навчити застосовувати принцип суперпозиції електричних полів. Ввести поняття потоку вектора напруженості; сформулювати теорему Остроградського-Гаусса для електростатичного поля та навчити її застосовувати.

Обладнання: таблиця Менделєєва, електроскоп, ебонітова та скляні палички, мультимедійний проектор.

Хід заняття.

I. Організаційний момент.

- а) готовність групи до заняття;
- б) психоемоційний настрій;
- в) перевірка присутніх.

II. Мотивація навчальної діяльності студентів.

- а) повідомлення теми та мети заняття;
- б) Зі шкільного курсу фізики відомо, що поле, яке передає дію одного нерухомого електричного заряду на інший нерухомий заряд, у відповідності із законом Кулона, називається електростатичним (або електричним) полем. Вивчення властивостей цього поля дозволило здійснити передачу енергії на відстань з допомогою поля і застосувати цю енергію для потреб людства: радіозв'язок, телебачення, сучасні ЕОМ. Вивчення фізичних властивостей поля і взаємодії між полем і речовиною – одна із найважливіших наукових проблем сучасної фізики.

III. Виклад нового матеріалу.

План

1. Закон збереження електричного заряду. Закон Кулона.

2. Електричне поле. Напруженість електричного поля. Принцип суперпозиції електричних полів.
3. Об'ємна і поверхнева густина заряду.
4. Електричний диполь.
5. Лінії напруженості електричного поля.
6. Потік напруженості крізь плоску поверхню.
7. Елементарний потік вектора E .
8. Повний потік E крізь замкнену поверхню S (теорема Остроградського-Гаусса).

IV. Узагальнення та систематизація знань.

Розв'язати задачі № 3.43; 3.49 із збірника задач за ред. І.П.Гаркуші.

V. Підведення підсумків заняття.

VI. Домашнє завдання: вивчити матеріал лекції; за підручником

«Загальний курс фізики», т.2, за ред. Кучерука І.М.

опрацювати матеріал на с.14 – 35; 38 - 40 або за підручником

«Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф. - на с.264 – 271;

розв'язати задачу №1 на с.296 підр. «Фізика».

Зміст лекції додається.

Самостійне вивчення: опрацювати матеріал теми «Потенціал електричного поля» за підручником «Загальний курс фізики», т.2, за ред. Кучерука І.М. на с.44 -54, або за підручником «Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф. - с.271 – 277; виконати ІДЗ № 1.

№ 3.43;

На деякій відстані від нескінченної рівномірно зарядженої площини розміщений круг радіуса $r = 15$ см, який паралельний площині. Поверхнева густина заряду площини $\sigma = 2$ мкКл/м². Обчислити потік Φ_E вектора напруженості E електричного поля крізь круг.

Відп. $\Phi_E = \pi \sigma r^2 / (2 \epsilon_0) = 7,98$ кВ·м.

№ 3.49

Електричне поле створюється двома нескінченними паралельними площинами, які рівномірно заряджені з поверхневими густинами зарядів $\sigma_1 = 2 \text{ нКл/м}^2$ і $\sigma_2 = -5 \text{ нКл/м}^2$

Визначити модуль E напруженості поля: а) між пластинами; б) поза пластинами.

Відп. а) $E = (\sigma_1 + \sigma_2) / 2\epsilon_0 = 395 \text{ В/м}$. б) $E = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2\epsilon_0 = 170 \text{ В/м}$.

Лекція №9

Закон збереження електричного заряду. Електричне поле. Напруженість електричного поля

Електростатика – це розділ фізики, в якому розглядають взаємодії і властивості електричних зарядів, що нерухомі в тій системі координат, в якій ці заряди вивчають.

У природі існує два види електричних зарядів – **позитивні і негативні**. Домовились вважати позитивним заряд, що виникає, наприклад, на склі, яке натирають шовком, а негативним – на бурштині, який натирають хутром. Однойменно заряджені тіла відштовхуються одне від одного, а різнойменно заряджені притягуються. Знак заряду, який виникає на тілі внаслідок електризації тертям, залежить не тільки від хімічного складу цього тіла, а й від того, з яким іншим тілом воно стикається при терті.

При електризації тіл тертям завжди одночасно електризуються обидва тіла, причому одне з них дістає позитивний заряд, а друге – негативний. Позитивний заряд першого тіла за величиною завжди точно дорівнює негативному заряду другого, якщо до електризації обидва тіла не були заряджені. Численними експериментами було встановлено **закон збереження електричних зарядів**:

в ізольованій системі алгебраїчна сума електричних зарядів залишається незмінною. Заряди можуть лише передаватись від одного тіла даної системи до іншого або зміщуватись всередині даного тіла.

Електричні заряди можуть зникати і виникати знову, але завжди зникають або виникають два електричні заряди протилежних знаків.

В 1909 р. Р.Мілікен встановив кратність електричного заряду деякому елементарному заряду e :

$$q = \pm N \cdot e, \text{ де } N=1, 2, 3...$$

Було виявлено, що цей елементарний заряд має величину $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$

Ш. Кулон в 1785 р. експериментально за допомогою крутильних терезів встановив основний закон взаємодії нерухомих точкових електричних зарядів.

Точковим називається заряд, який зосереджений на тілі, лінійні розміри якого малі порівняно з відстанню до інших заряджених тіл, з якими він взаємодіє.

Закон Кулона: сила електростатичної взаємодії між двома точковими електричними зарядами у вакуумі прямо пропорційна до добутку величин зарядів і обернено пропорційна до квадрата відстані між ними:

$$F = k \frac{|q_1| |q_2|}{r^2},$$

де k – коефіцієнт пропорційності.

Сили, які діють на заряди, є **центральними**, тобто вони напрямлені вздовж прямої, що з'єднує заряди.

Закон Кулона можна записати у векторній формі. Якщо $\vec{r}_{12}$ – радіус-вектор, що з'єднує заряд q_1 із зарядом q_2 (рис. 95) і $|\vec{r}_{12}| = r$, тоді

$$\vec{F}_{12} = -k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_{12}, \quad \vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}_{12}.$$

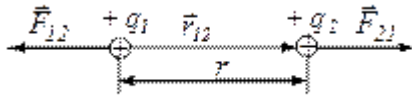


Рис. 95

У системі SI для зарядів у вакуумі коефіцієнт k у формулі закону Кулона записують у формі

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

де $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{Кг^2}{Н м^2}$ – електрична стала, і, отже, $k = 9 \cdot 10^9 \frac{Н м^2}{Кг^2}$.

Множник 4π у виразі $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ відбиває сферичну симетрію електростатичного поля точкового заряду, оскільки величина 4π числово дорівнює повному тілесному куту в стерadianах.

Простір, у якому перебуває електричний заряд, характеризується певними фізичними властивостями і називається електричним полем.

Електричне поле – це специфічний вид матерії, який існує навколо електричних зарядів і за допомогою якого передається електрична взаємодія.

Воно проявляє себе в тому, що поміщений в нього електричний заряд виявляється під дією сили, яка пропорційна до величини заряду. Якщо електричне поле створюється нерухомими електричними зарядами, то таке поле називається **електростатичним**.

Для виявлення і дослідного вивчення електростатичного поля використовується **пробний заряд** $q_{пр}$. Це одиничний позитивний точковий заряд, який не бере участі у створенні поля і не спотворює досліджуване поле, тобто не спричинює перерозподілу зарядів, які утворюють поле.

Якщо в поле, що створюється зарядом q помістити пробний заряд $q_{пр}$, то на нього діє сила $\vec{F}$, яка пропорційна до величини $q_{пр}$. Тому ця сила не може бути характеристикою самого поля.

Але величина, яка дорівнює відношенню $\frac{\vec{F}}{q_{пр}} = const$, може служити **силовою характеристикою поля**. Векторна величина $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}}$ називається **напруженістю електричного поля**.

Напруженість електричного поля числово дорівнює силі, що діє на одиничний позитивний пробний заряд в даній точці поля.

За напрямком вектора напруженості $\vec{E}$ беруть напрямок сили, з якою поле діє на пробний позитивний заряд, вміщений у певну точку поля (рис. 96).

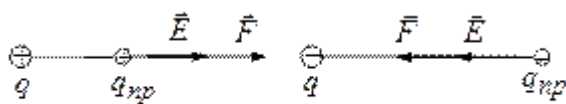


Рис. 96

У системі СІ одиниця напруженості електричного поля 1 Н/Кл – це напруженість такого поля, яке діє з силою 1 Н на точковий заряд 1 Кл .

Електричні поля зображають за допомогою **ліній напруженості**, які проводять так, щоб дотичні до цих ліній в кожній точці збігалися з напрямками вектора $\vec{E}$ (рис. 97).

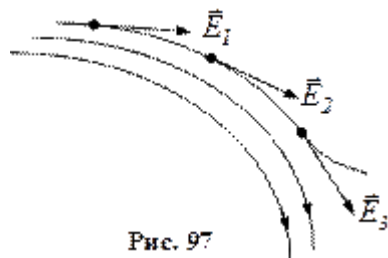


Рис. 97

Лінії напруженості мають початок і кінець або йдуть у нескінченність чи з нескінченності, вони напрямлені від позитивного заряду до негативного, тобто виходять з позитивного заряду, а входять у негативний заряд. Лінії напруженості ніколи не перетинаються. Ці лінії проводять з такою густиною, щоб кількість ліній, які пронизують одиничну площу, перпендикулярну до вектора напруженості, числово дорівнювала величині напруженості електричного поля в місці розміщення площини. Приклади графічного зображення електричних полів за допомогою ліній напруженості показано на рис. 98.

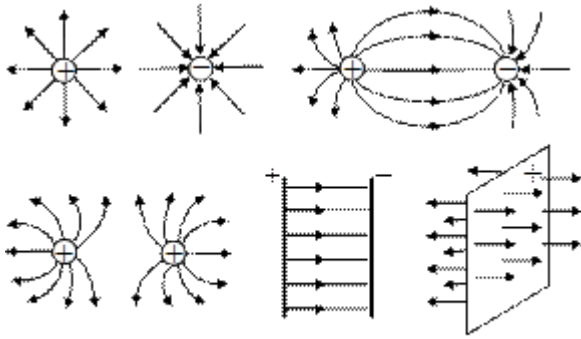


Рис. 98

Поле, у всіх точках якого величина і напрямок вектора напруженості незмінні, називається **однорідним**.

Воно утворюється між зарядженими площинами, якщо вони паралельні і нескінченно великі. Однорідне поле зображують паралельними лініями напруженості, що мають однакову густину.

Якщо поле створено системою N нерухомих зарядів, то результуюча сила, яка діє на пробний заряд зі сторони системи зарядів, дорівнює векторній сумі сил, з якими окремі заряди діють на пробний.

Напруженість поля системи точкових зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей полів, які створював би кожний із зарядів системи зокрема:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i}{q_{пр}} = \frac{\vec{F}_1}{q_{пр}} + \dots + \frac{\vec{F}_N}{q_{пр}},$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N.$$

Це твердження називають **принципом незалежності дії** електричних полів, або **принципом суперпозиції полів**.

Виходячи із закону Кулона, напруженість поля точкового заряду у вакуумі на відстані r від заряду:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}_{12}.$$

Звідси видно, що поле точкового заряду – центральне симетричне.

Принцип суперпозиції дає можливість обчислювати напруженість поля будь-якої системи зарядів. Подумки поділяючи, наприклад, заряджене тіло скінченних розмірів на точкові заряди, знаходимо складові напруженості в певній точці, створені окремими елементами зарядженого тіла. Потім, згідно з принципом суперпозицій, визначаємо результуючу напруженість.

Нерухомі електричні заряди розміщуються в просторі або дискретно в окремих точках, або неперервно – вздовж якоїсь лінії, на поверхні якого-небудь тіла або в якомусь об'ємі. Якщо заряд неперервно розподілений вздовж лінії, то можна ввести **лінійну густину електричних зарядів**

$$\tau = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl},$$

де Δq - заряд ділянки лінії завдовжки Δl

Неперервний розподіл заряду по якійсь поверхні характеризується **поверхневою густиною зарядів**

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS},$$

де Δq - заряд ділянки поверхні, площа якої становить ΔS .

Якщо заряд Δq неперервно розподілений у певному об'ємі ΔV , то введемо **об'ємну густину зарядів**

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}.$$

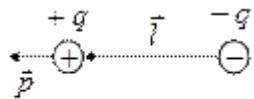


Рис. 99

Електричним диполем називається система з двох однакових за величинами і протилежних за знаком електричних зарядів $+q$ і $-q$, відстань l між якими мала порівняно з відстанню до точок поля, які розглядаються (рис. 99).

Потік вектора напруженості. Теорема Остроградського-Гаусса

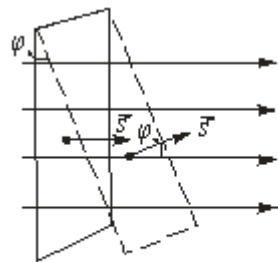


Рис 2.10

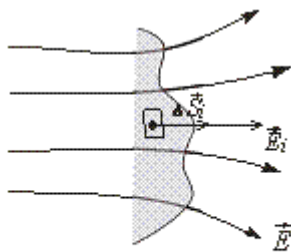
Розглянемо деяку площадку S (рис.2.10), яку пронизують силові лінії однорідного електричного поля напруженістю $\vec{E}$ (для простоти зображення вважатимемо, що площадка має форму прямокутника). Число силових ліній N , що проходять через одиничну площадку перпендикулярно до напрямку поля, пропорційне напруженості електричного поля, тобто $E \sim N/S$, звідки $N \sim E \cdot S = \Phi_E$ називають потоком

напруженості поля через площадку, який, як видно, пропорційний числу силових ліній, що перетинають дану поверхню.

Якщо вектор напруженості електричного поля перпендикулярний до деякої площадки, то потік напруженості через дану площадку $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S}$. Якщо ж площадка S , утворює деякий кут з $\vec{E}$, то потік $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S} \cdot \cos\varphi$.

Розглянемо більш загальний випадок, коли електричне поле $\vec{E}$ – неоднорідне, а поверхня неплоска (рис.2.11). Розіб'ємо дану поверхню на n елементів з площами $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. Таке розбиття повинно забезпечити дві умови:

1. кожен елемент ΔS_n повинен бути плоским;
2. електричне поле в межах кожного елемента – однорідне.



За таких умов потік вектора напруженості через всю поверхню буде

$$\Phi_E \approx \sum_{i=1}^n E_i \cdot \Delta S_i$$

сумою. Якщо $\Delta S_i \rightarrow 0$, то рівність стає точною,

$$\text{тобто } \Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Рис 2.11

Якщо силове поле пронизує об'ємне тіло (рис.2.12), то вектор напруженості, що входить в об'єм із вектором перпендикулярним до

елементарної площадки утворює кут $\varphi > \frac{\pi}{2}$, т.б. $\cos\varphi < 0$,

а вектор $\vec{E}$, що виходить із елементарної площадки, утворить

кут $\varphi < \frac{\pi}{2}$, т.б. $\cos\varphi > 0$. Відповідно, потік, що входить в замкнений об'єм –

від'ємний ($\Phi_E = \int E \cos\varphi dS < 0$), а потік, що виходить із даного об'єму – додатний

($\Phi_E = \int E \cos\varphi dS > 0$). Оскільки число ліній, які входять в об'єм дорівнює числу ліній,

що виходять то результуючий потік $\Phi_E = 0$. Потік $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \neq 0$ лише в тому випадку,

коли якась кількість ліній починається або закінчується всередині замкненої поверхні. А оскільки силові лінії можуть починатись чи закінчуватись лише на електричних зарядах, то потік буде відмінним від нуля лише у випадку, коли сумарний заряд всередині поверхні відмінний від нуля.

Теорема Остроградського–Гаусса встановлює точне співвідношення між потоком напруженості електричного поля через замкнену поверхню і сумарним зарядом q всередині даної поверхні. Вона формулюється так: *повний потік напруженості через довільну замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі електричних зарядів, що*

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \sum_i q_i$$

містяться всередині цієї поверхні, або математично сумарний заряд всередині поверхні, по якій береться інтеграл. Причому неважно, як саме розподілений заряд всередині поверхні, а заряди зовнішні – не враховуються.

Можливі випадки, коли потік напруженості обертається в нуль:

1. алгебраїчна сума всіх внутрішніх зарядів дорівнює нулеві;
2. зарядів всередині поверхні немає, а є лише поле, пов'язане із зовнішніми зарядами;
3. немає ні поля, ні внутрішніх зарядів.

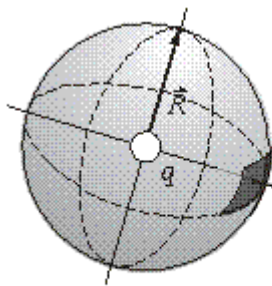


Рис 2.13

Як пов'язані теорема Остроградського–Гаусса та закон Кулона? Нехай маємо деякий точковий заряд q , який знаходиться в центрі сфери, тобто замкненої поверхні (рис.2.13). Це значить, що напруженість електричного поля $\vec{E}$ має одне й теж значення в будь-якій точці сфери. Причому $\vec{E} \parallel d\vec{S}$, тоді

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \sum_i q_i$$

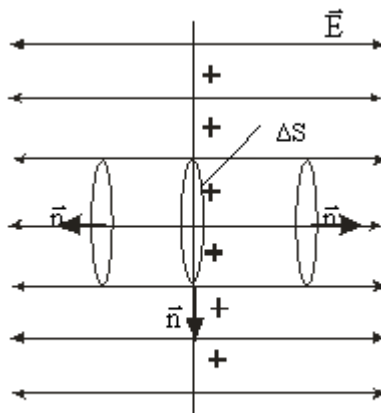
рівність набуде

вигляду: $\Phi_E = \vec{E} \oint d\vec{S} = \vec{E} \cdot 4\pi R^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} q$, де $4\pi R^2$ – площа поверхні сфери. Звідки й

слідуює, що $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R^2}$, тобто те ж, що одержали із закону Кулона.

Таким чином, теорема Остроградського–Гаусса є більш загальним законом ніж закон Кулона.

3.Застосування теореми Остроградського–Гауса для розрахунку найпростіших електричних полів у вакуумі: поля нескінченної площини, двох паралельних площин, сфери, кулі, циліндра.



Мал.3.1.

На попередніх лекціях ми розглядали принцип суперпозиції електричних полів, який дає можливість знаходити поля, створені системою зарядів. Це правило дає можливість проводити порівняно прості розрахунки для системи точкових зарядів. Коли ж маємо неперервний розподіл заряду, виникають труднощі з операцією сумування. Для того, щоб обійти дану проблему, використовують теорему Остроградського-Гауса.

а) Розрахуємо електричне поле нескінченно великої плоскої рівномірно до зарядженої поверхні, розміщеної у вакуумі. Для цього використаємо інтегральну форму теорему Остроградського-Гауса. Якщо густина поверхневого заряду (заряд, що припадає на одиницю площі) на площині $-\sigma$ і поверхня заряджена позитивно, тоді лінії напруженості будуть напрямлені так, як зображено на

мал.3.1. Визначимо напруженість поля на основі циліндра, який ми вибираємо, як поверхню інтегрування. Площа ΔS , яку обмежує поверхня циліндра буде мати заряд $q = \sigma \Delta S$. З обраних умов інтегрування видно, що потік ліній напруженості електричного поля буде відмінний від нуля лише через основи циліндра, і, згідно з означенням потоку він буде

рівний
$$N = \oint_S \mathbf{E}_n dS = 2E\Delta S$$

Запишемо теорему Остроградського-Гауса,

$$2E\Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (3.1.),$$

в нашому випадку

$$\int_V \rho dV = q = \sigma \Delta S \quad (3.2.).$$

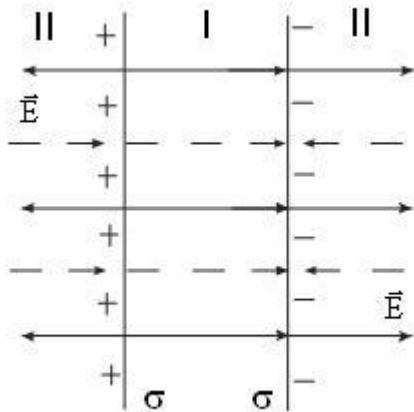
Підставимо 3.2. в 3.1., отримаємо: $2E\Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta S$, або

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (3.3.)$$

З геометричних міркувань та симетрії системи бачимо, що лінії напруженості електричного поля перпендикулярні до зарядженої площини. Напруженість визначатиметься формулою 3.3., в якій немає залежності від координати, тобто напруженість буде однакою на різних відстанях від площини.

Індукція електричного поля створеного площиною визначатиметься формулою $D = \frac{\sigma}{2}$.

б) Розглянемо дві паралельні із зарядами протилежних знаків нескінченні плоскі поверхні (мал.3.2.). Нехай густина поверхневого заряду на додатньої від'ємно заряджених площинах за модулем однакові і становить σ . Простір відносно площин можна поділити на три області: одна між площинами (I), де поле від двох різних площин буде напрямлене однаково, та дві області (II), де поля напрямлені в протилежні сторони.



Мал.3.2.

Оскільки, площини мають заряд однакокий за модулем, то в області (II), згідно з принципом суперпозиції, напруженість електричного поля дорівнюватиме нулю $E = 0$.

Напруженість створена негативно зарядженою

$$E^- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

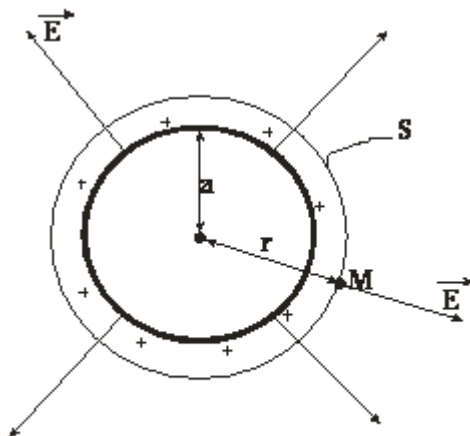
$$E^+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

площиною та позитивно зарядженою які в (I) полях мають однаковий напрям, тому, згідно з принципом суперпозиції електричних полів, сумарна

$$E = E^- + E^+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

напруженість

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.4.)$$



Мал.3.3.

Аналогічні міркування можна провести для індукції електричного поля. В області (II) $D = 0$, в (I) $D = \sigma$. Попередня формула та формула 3.4 описують електричне поле, створене досліджуваною системою. Також, потрібно звернути увагу на те, що поле існуватиме лише між площинами.

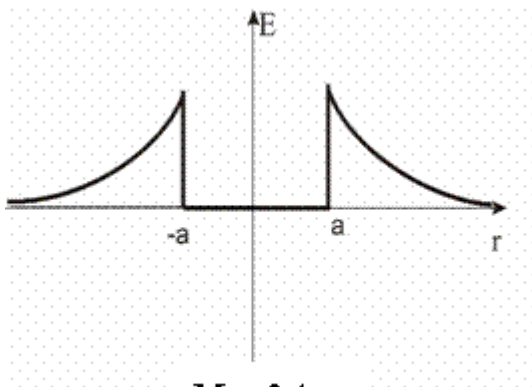
в) Поле рівномірно зарядженої сферичної поверхні радіусу a (мал.3.3.). Будемо вважати, що поверхня розміщена у вакуумі і заряджена рівномірно та позитивно, сумарний заряд поверхні рівний q . Визначимо напруженість електричного поля в т. М. Для зручності поверхню інтегрування виберемо сферичною (на малюнку

позначено S), радіус сфери - r . Розглянемо праву частину теореми Остроградського-Гауса.

$$\oint_S \vec{E}_n dS = E \oint_S dS = E 4\pi r^2$$

При обчисленні інтеграла ми встановили, що проекція вектора напруженості $\vec{E}_n$ на нормаль до поверхні S , в розглядуваному випадку, співпадатиме з самим вектором напруженості $\vec{E}$, а інтеграл по замкнутій поверхні, яка є сферою, буде рівний площі сфери $\oint_S dS = S = 4\pi r^2$. Підставивши отримані результати в теорему Остроградського-

Гауса, отримаємо $E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$, або



Мал.3.4.

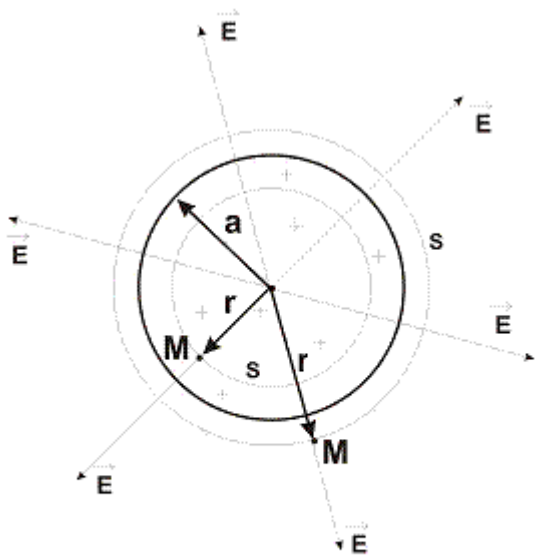
$$E = \frac{q}{4\epsilon_0 \pi r^2} \quad (3.5)$$

Формула 3.5. визначає напруженість електричного поля, створеного на

відстані $r > a$ зарядженої сфери. Також, використовуючи результати, отримані в попередній лекції, можна сказати, що електричне поле сфери таке ж, як полеточкового заряду q , поміщеного в центр сфери. Очевидно, що в середині сфери напруженість електричного поля рівна нулю. Графічна залежність напруженості електричного поля сферичної поверхні матиме вигляд, як на мал.3.4.

г) Електричне поле, створене рівномірно зарядженою кулею. Розглянемо кулю радіуса a . З об'ємною густиною заряду (заряд, що припадає на одиницю об'єму) - ρ , заряд всередині позитивний та розподілений рівномірно. Використовуючи теорему Остроградського-Гауса, визначимо напруженість, створену кулею в точці M , розміщеній на відстані r від центра кулі (мал.3.5.). Для зручності поверхнею інтегрування оберемо сферу S радіус якої - r .

1.Точка М розташовується на



Мал.3.5.

відстані $r > a$. Проінтегрувавши праву частину теореми Остроградського-Гауса, як і в попередньому пункті, отримаємо:

$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \text{ або}$$

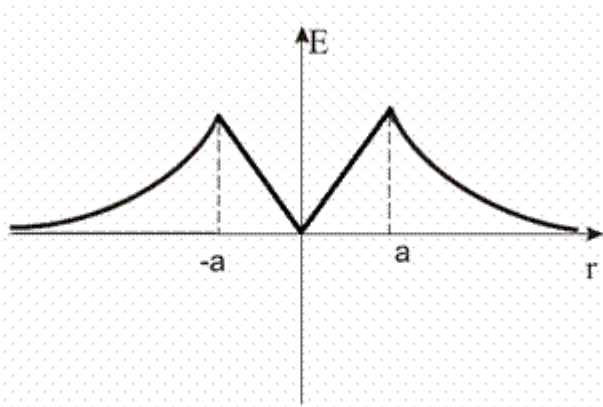
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (3.6.)$$

де q – заряд, обмежений поверхнею, S площа якої рівна $4\pi r^2$.

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi a^3, \quad (3.7.)$$

Підставивши 3.7. в 3.6. та провівши математичні спрощення, отримуємо:

$$E = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} \quad (3.8.)$$



Мал.3.6.

Формула (3.8.) описує поле, створене зарядженою кулею поза межами кулі. Формула 3.6. однакова як для сферичної поверхні, так і для точкового заряду.

2. Точка М знаходиться на відстані $r \leq a$. Повний заряд частини кулі, що обмежує

поверхня S радіусу r, провівши аналогічні міркування, як і в попередньому пункті,

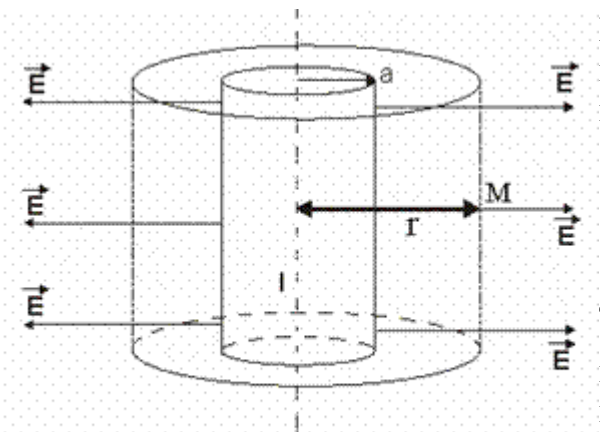
отримаємо
$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4\pi r^3}{3}, \text{ або}$$

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r. \quad (3.9)$$

Остання формула виражає залежність напруженості електричного поля від відстані всередині кулі. Враховуючи 3.8. та 3.9, побудуємо графік залежності $E=E(r)$ (мал.3.6).

д) Поле рівномірно зарядженої циліндричної поверхні.

Будемо вважати, що поверхня заряджена рівномірно з лінійною густиною заряду (заряд одиниці довжини циліндра) $-\eta$, радіус циліндра a . Поверхня заряджена позитивно. Лінії напруженості електричного поля будуть напрямлені по радіусу основ циліндричної поверхні так, як це зображено на мал.3.6. Поверхню інтегрування, для зручності, виберемо циліндричною з радіусом r. Визначимо напруженість електричного поля в точці М, розміщеній на відстані r ($r \geq a$) від осі циліндра.



Мал.3.7.

Розглянемо потік ліній напруженості електричного поля, створеного зарядженою поверхнею через поверхню інтегрування – S.

$$\oint_S \mathbf{E}_n dS = E \oint_S dS = E 2\pi r l, \quad (3.10.)$$

тут використовувались такі міркування: в нашому випадку $\mathbf{E}_n = \mathbf{E}$; вектор напруженості та проекція вектора напруженості на нормаль

до S співпадають; $\oint_S dS = 2\pi r l$ – площа циліндричної

поверхні інтегрування, де l-висота. Повний заряд циліндра висоти l:

$$q = \eta l \quad (3.11)$$

Використовуючи формули 3.10., т 3.11. та теорему Остроградського-Гауса отримаємо

$$E 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \eta l, \text{ або}$$

$$E = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (3.12)$$

Вираз 3.12 дає змогу визначити напруженість електричного поля, створеного циліндричною рівномірно зарядженою поверхнею з лінійною густиною η на відстані r від осі циліндра у випадку, коли $r \geq a$. Якщо розглянути область всередині циліндра ($r \leq a$) то напруженість буде рівна нулю $E = 0$

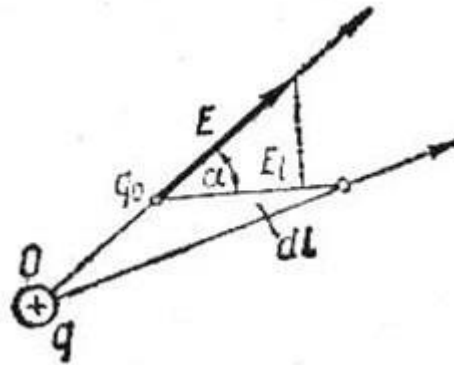
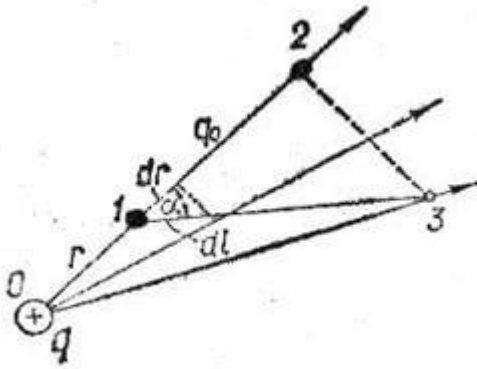
Матеріал для самостійного вивчення з теми

Робота переміщення заряду в електростатичному полі. Циркуляція вектора напруженості електростатичного поля. Потенціал електростатичного поля як енергетична характеристика. Потенціал системи зарядів. Різниця потенціалів. Еквіпотенціальні поверхні. Напруженість як градієнт потенціалу

Робота електричного поля по переміщенню заряду

На будь-який заряд q , внесений в електричне поле з напруженістю E , діє сила $F = Eq$. При відсутності протидіючих сил (тертя, пружна деформація зв'язків тощо) заряд q під дією електричної сили рухатиметься з прискоренням:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m}$$



і, отже, змінюватиме свою швидкість, а тому і кінетичну енергію. Це означає, що при переміщенні заряду в електричному полі виконується робота.

Для обчислення цієї роботи розглянемо переміщення пробного заряду q_0 вздовж лінії напруженості електричного поля точкового заряду q між точками 1 і 2 (мал.1). На заряд q_0 в точці 1, що знаходиться на відстані r від точкового заряду q , діє сила

$$F = Eq_0, \text{ де } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}.$$

Поділимо відстань між точками 1 і 2 на такі малі відрізки dr , щоб напруженість E , а отже силу $F = Eq_0$ у всіх точках такого відрізка можна було б вважати сталими. Тоді елементарна робота dA на шляху dr обчислюватиметься за формулою (напрямок переміщення і дії сили збігаються)

$$dA = Fdr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_0}{r^2} dr.$$

Робота на деякому кінцевому відрізку між точками 1 і 2 визначатиметься інтегральною сумою

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qq_0}{\epsilon r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2}.$$

Отже,

$$A = q_0 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_2} \right).$$

Тепер розглянемо випадок, коли точки 1 і 3 розміщені не на одній силовій лінії, тобто коли напрями переміщення і дії сили не збігаються, а утворюють кут α . Візьмемо точки 2 і 3 на однаковій відстані від заряду q . Елементарна робота на шляху dl дорівнює

$$dA = F dl \cos \alpha$$

Оскільки $dl \cos \alpha = dr$, то $dA = F dr$. Інтегрування цього виразу приводить до попереднього результату.

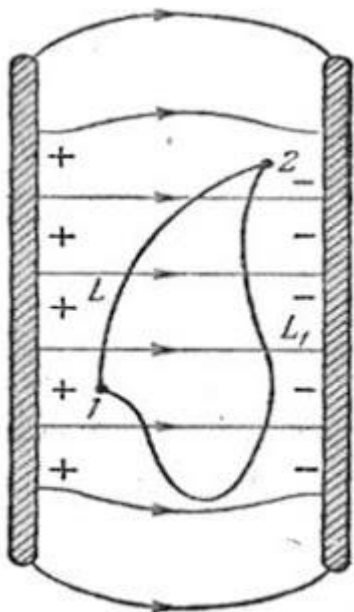
Отже, робота по переміщенню заряду q_0 між точками 1 і 2 та точками 1 і 3 однакова. З цього випливає, що робота на шляху 0-3 дорівнює роботі на шляху 0-1-3. Це означає, що робота по переміщенню заряду q_0 в електростатичному полі не залежить від форми шляху і визначається тільки відносним розміщенням початкової і кінцевої точок цього шляху.

Як відомо, силове поле, в якому робота не залежить від форми шляху, є потенціальним полем. Отже, електростатичне поле – це поле потенціальне.

В потенціальному полі робота на довільному замкненому шляху, коли початкова і кінцева точки переміщення збігаються, дорівнює нулю. Справді, в цьому разі точки 1 і 2 збігатимуться, їх відстані r_1 і r_2 від заряду q будуть рівними. При цьому доданки в дужках у формулі

$$A = q_0 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_2} \right)$$

матимуть однакові значення, а їх різниця дорівнюватиме нулю.



Аналітично цей висновок можна записати так:

$$A = \oint_L F dl \cos \alpha = \oint_L E q_0 dl \cos \alpha = 0,$$

де інтегральна сума обчислюється вздовж замкненого шляху L .

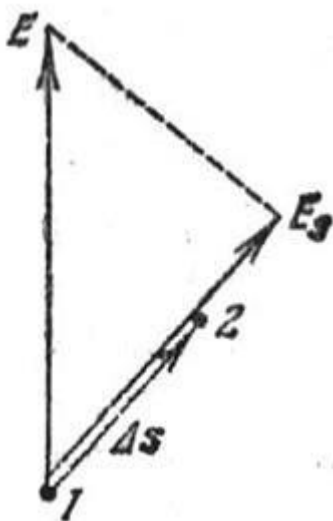
Добуток $E \cos \alpha = E_t$ визначає проекцію вектора напруженості E на напрям переміщення dl заряду q_0 (мал.2). Оскільки $q_0 \neq 0$, то після скорочення дістанемо

$$\oint_L E_t dl = 0 \quad , \text{ або } \oint_L (E dl) = 0.$$

Цей інтеграл називають циркуляцією вектора напруженості E по замкненому контуру. Отже, циркуляція вектора напруженості електростатичного поля (як і будь-якого іншого потенціального поля) дорівнює нулю.

Різниця потенціалів і напруженість поля

Якщо відомий розподіл потенціалів, тобто його значення в кожній точці поля, то можна знайти і напруженість цього поля в кожній точці.



Розглянемо в однорідному електричному полі дві точки 1 і 2 і припустимо, що заряд $+1$ переходить з точки 1 в точку 2 вздовж прямолінійного відрізка Δs (мал.3). Роботу електричних сил ΔA при цьому переміщенні можна виразити, по-перше, через напруженість поля:

$$\Delta A = E_s \Delta s,$$

де E_s – проекція вектора напруженості E на напрямок Δs . З іншого боку, ту ж роботу можна виразити через різницю потенціалів ΔU_{12} точок 1 і 2:

мал.4
$$\Delta A = \Delta U_{12}.$$

Введемо тепер приріст потенціалу при переміщенні Δs , тобто різницю потенціалів ΔU_{21} точки 2 (кінець шляху) і точки 1 (початок шляху), і будемо позначати його просто ΔU . Тоді

$$\Delta U = \Delta U_{21} = -\Delta U_{12}$$

Прирівнявши обидва вирази для роботи, отримуємо для напруженості електричного поля вираз

$$E_s = -\frac{\Delta U}{\Delta s}.$$

В обох випадках неоднорідного поля обидві точки 1 і 2 потрібно вибрати достатньо близько одну від одної, строго кажучи, нескінченно близько, щоб можна було вважати напруженість поля на відрізку Δs постійною. Переходячи до границі при $\Delta s \rightarrow 0$, отримаємо

$$E_s = -\frac{dU}{ds}$$

Похідна, яка стоїть в правій частині рівності, виражає швидкість зміни потенціалу в даному напрямку. Ми бачимо, що проекція вектора напруженості на даний напрямок дорівнює швидкості зміни потенціалу в цьому напрямку з протилежним знаком.

Градiєнтом будь-якої скалярної величини ϕ в векторному аналізі називається вектор, напрямком якого співпадає з напрямком найшвидшого збільшення величини ϕ . Величина ж цього вектора дорівнює зміні ϕ при переміщенні на одиницю довжини в напрямку найшвидшої зміни. Із сказаного слідує, що напруженість електричного поля дорівнює градієнту потенціала з протилежним знаком

$$E = -\text{grad}U$$

Таким чином, знаючи розподіл потенціалів, ми завжди можемо визначити і проєкцію напруженості поля на будь-який напрямок, а значить, і проєкції E_x, E_y, E_z на координатні осі.

Якщо поле однорідне, тобто створюється плоским конденсатором, а U – напруга між пластинами, d – відстань між ними, то

$$E = U/d.$$

Ці співвідношення використовують для визначення одиниці напруженості електричного поля. Одиниця напруженості це напруженість такого поля, в якому напруженість на 1м довжини силової лінії дорівнює 1В. Вона отримала назву вольт на метр (В/м).

Потенціал і еквіпотенціальні поверхні

Оскільки робота з переміщення заряду в електростатичному полі не залежить від форми шляху і визначається лише положенням крайніх точок (початкової та кінцевої), то кожній з цих точок, крім силової характеристики E , можна приписати ще й енергетичну характеристику ϕ , яку називають потенціалом електростатичного поля.

Нехай вміщений в електростатичне поле пробний заряд q_0 переміщається під дією сил поля з точки 1 у точку 2. На основі закону збереження і перетворення енергії виконана при цьому робота дорівнює зменшенню потенціальної енергії пробного заряду в заданому силовому полі:

$$A_{12} = -\int_1^2 dU = q_0 \int_1^2 E dl \cos \alpha$$

Припустимо, що точка 2 нескінченно віддалена, тобто розміщена на такій відстані, де електростатичне силове поле практично відсутнє. Тоді отримаємо:

$$A_{1\infty} = U_1 - U_{\infty} = q_0 \int_1^{\infty} E dl \cos \alpha$$

Взявши до уваги, що на нескінченності $U_{\infty} = 0$, можна записати

$$\frac{A_{1\infty}}{q_0} = \frac{U_1}{q_0} = \int_1^{\infty} E dl \cos \alpha$$

Якщо збільшувати числове значення пробного заряду $2q_0, 3q_0, \dots, nq_0$, який переноситься з точки 1 у нескінченність, то відповідно збільшуватиметься в стільки ж разів робота $2A_{1\infty}, 3A_{1\infty}, \dots, nA_{1\infty}$, а відношення цієї роботи до значення пробного заряду $A_{1\infty}/q_0$ залишається незмінним для заданої точки поля і може бути її енергетичною характеристикою.

Отже, розрахована на одиницю пробного заряду робота з переміщення його із даної точки поля 1 у нескінченність не залежить ні від форми шляху, ні від пробного заряду, а залежить лише від характеристики самого електростатичного поля в цій точці. Цю роботу приймають як однозначну енергетичну характеристику електростатичного поля в заданій точці 1 і називають її потенціалом

$$\varphi_1 = \frac{A_{1\infty}}{q_0} = \frac{U_1}{q_0} = \int_1^{\infty} E dl \cos \alpha$$

Звідси, потенціал електростатичного поля – це фізична величина, що чисельно дорівнює роботі, яку виконують сили електричного поля при переміщенні пробного одиничного заряду із заданої точки в нескінченність (або в точку, для якої потенціал умовно можна вважати таким, що дорівнює нулеві). Або інакше кажучи, електростатичним потенціалом називають відношення потенціальної енергії взаємодії заряду з полем до значення цього заряду. У теоретичній фізиці за нульове значення φ приймають потенціал нескінченно віддаленої точки простору: $\varphi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. На практиці нульовим потенціалом вважають потенціал Землі. З рівності $\varphi = A/q_0$ встановлюють одиницю потенціалу. В СІ $[\varphi] = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ Кл} = 1 \text{ В}$. Значення потенціалу в 1В приписують такій точці поля, при переміщенні з якої заряду в 1Кл на нескінченність виконується робота в 1Дж. Потенціал – скалярна величина. Потенціали точок поля позитивного заряду вважають додатними, а негативного – від'ємними.

При розв'язуванні задач з електростатики використання потенціалу φ має ряд переваг порівняно з напруженістю E . Потенціал φ задається одним числом, а напруженість E – трьома (E_x, E_y, E_z). Значення різниці потенціалів неважко визначити на досліді.

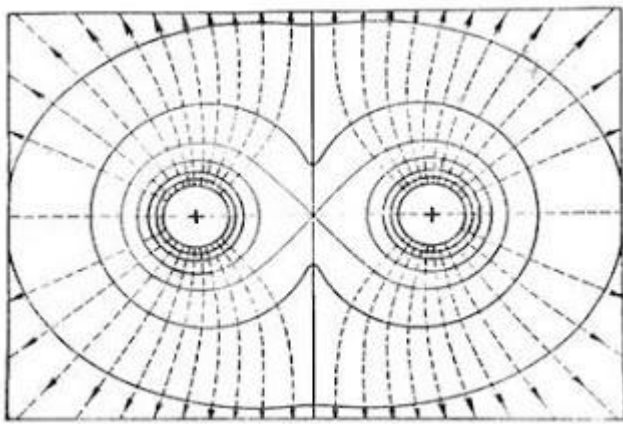
Об'єднуючи в електричному полі точки з однаковим потенціалом, ми отримуємо деякі поверхні, які називаються поверхнями рівного потенціалу або екіпотенціальними поверхнями. Користуючись екіпотенціальними поверхнями, можна зображати електричні поля графічно, подібно до того як це робиться за допомогою силових ліній. Пересікаючись з площиною креслення, екіпотенціальні поверхні дають екіпотенціальні лінії. Прокреслюючи екіпотенціальні лінії, відповідні різним значенням потенціалу, ми одразу отримуємо наглядне уявлення про те, як змінюється потенціал в даному полі.

Так як всі точки екіпотенціальної поверхні знаходяться при однаковому потенціалові, то переміщення заряду вздовж неї не потребує роботи. Це значить, що сила, діюча

на заряд, весь час перпендикулярна до переміщення. Отже, силові лінії завжди перпендикулярні до екіпотенціальних поверхонь (мал.3).

Якщо прокреслювати екіпотенціальні лінії так, щоб вони відповідали однаковим приростам потенціалу, наприклад 1, 2, 3 і т.д. вольт, то швидкість зміни потенціалу в напрямку силових ліній буде обернено пропорційною відстані між сусідніми екіпотенціальними лініями. Це означає, що густина екіпотенціальних ліній пропорційна напруженості поля: там де більша напруженість поля, там і екіпотенціальні лінії розміщуються тісніше одна до одної.

Отже, знаючи екіпотенціальні поверхні, завжди можна побудувати силові лінії даного поля і навпаки. Тому будь-яке електричне поле можна графічно зобразити за допомогою екіпотенціальних ліній так же добре, як і за допомогою силових ліній.



Потенціал поля точкового заряду та системи зарядів

Потенціал електростатичного поля точкового заряду q в довільній точці цього поля

на відстані r у вакуумі на основі рівності $\varphi_1 = \frac{A_{1\infty}}{q_0} = \frac{U_1}{q_0} = \int_1^{\infty} E dl \cos \alpha$ з урахуванням

формули $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}$ і того, що $dl \cos \alpha = dr$, може бути розрахований так:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

де прийнято, що $\varphi_{\infty} = 0$ при $r \rightarrow \infty$.

З даної рівності видно, що потенціал поля точкового заряду q однозначно визначається цим зарядом і є функцією відстані r розглядуваної точки від місця розміщення заряду.

За принципом суперпозиції потенціал поля системи точкових зарядів дорівнює алгебричній сумі потенціалів, створюваних у розглядуваній точці кожним із зарядів (з урахуванням їх знаків):

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

де r_i – відстань від точки із зарядом q_i точки, в якій визначається потенціал.

При неперервному розподілі зарядів у скінченній області простору з об'ємною густиною $\rho(x', y', z')$

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r},$$

а для поверхневих зарядів з густиною $\sigma(x', y', z')$

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma dS}{r},$$

де $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$. В цих формулах також вважається, що потенціал на нескінченності дорівнює нулеві.

Лекція № 10

Тема: Типи діелектриків. Поляризація діелектриків. Вектор поляризації. Напруженість електричного поля в діелектрику. Відносна діелектрична проникність діелектрика. Електричне зміщення. Теорема Остроградського-Гаусса для електричного поля в діелектрику. Сегнетоелектрики. П'єзоелектричний ефект. Зворотний п'єзоелектричний ефект.

Мета: вияснити фізичну суть процесів, що відбуваються в діелектрику, вміщеному в електричне поле; пояснити теорему Остроградського-Гаусса для електростатичного поля в діелектрику.

Обладнання: кристали-діелектрики

Хід заняття.

I. Організаційний момент.

- а) готовність групи до заняття;
- б) психоемоційний настрій;
- в) перевірка присутніх.

II. Актуалізація опорних знань студентів.

Дати відповіді на питання:

*Чим відрізняються речовини, що відносяться до діелектриків, від провідників?

*Як ви думаєте, чи впливає середовище на силу взаємодії електричних зарядів?

III. Виклад нового матеріалу.

План

1. Типи діелектриків. Поляризація діелектриків.
2. Вектор поляризації.
3. Напруженість електричного поля в діелектрику. Відносна діелектрична проникність.
4. Електричне зміщення. Теорема Остроградського-Гаусса для електростатичного поля в діелектрику
5. Сегнетоелектрики.
6. П'єзоелектричний ефект. Зворотний п'єзоелектричний ефект

IV. Узагальнення та систематизація знань.

Розв'язати задачу № 3.130 із збірника задач за ред. І.П.Гаркуші:

V. Підведення підсумків заняття.

VI. Домашнє завдання: за підручником «Загальний курс фізики», т.2, за ред. Кучерука І.М. опрацювати матеріал на с.64 – 85; 92 - 101 або за підручником Дмитрієвої В.Ф. – на с.277 – 281

Самостійне вивчення:

опрацювати матеріал теми «Електроємність. Конденсатори. Енергія електричного поля» за підручником «Загальний курс фізики», т.2, за ред. Кучерука І.М на с. 60 – 64; 103 - 105 або за підручником «Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф. - с.284 -289; розв'язати задачу №12 підр. «Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф. на с.296.

Зміст лекції додається

Лекція № 10

Типи діелектриків. Електронна і орієнтаційна поляризація

Діелектриками (або ізоляторами) називаються речовини, нездатні проводити електричний струм.

У природі ідеальних ізоляторів не існує, вони проводять струм в 10^{15} - 10^{20} разів гірше, ніж провідники.

Питомий опір діелектриків становить $\rho \approx 10^{15} \text{ Ом}\cdot\text{м}$. У діелектриках немає вільних електричних зарядів (електронів), як в металах або інших провідниках.

Кожна молекула (або атом) діелектрика має позитивно заряджені ядра і негативно заряджені електрони, які рухаються навколо ядер. Позитивні заряди всіх ядер дорівнюють абсолютній величині заряду всіх електронів, а тому молекула речовини загалом електрично нейтральна.

Вивчаючи електричні властивості діелектриків, молекули діелектриків можна зобразити як систему, що складається з двох точкових зарядів.

Замінімо всі позитивні заряди ядер молекули одним сумарним зарядом $+q$, що перебуває в центрі мас позитивних зарядів, а всі негативні заряди – одним сумарним негативним зарядом -

q , що перебуває в центрі маси негативних зарядів. Тоді молекулу діелектрика можна розглядати як диполь, який складається із зарядів $+q$ і $-q$.

Діелектрики поділяються на три типи.

I. Неполарні діелектрики – це діелектрики, які складаються з молекул, центри мас позитивних і негативних зарядів яких збігаються за відсутності електричного поля (рис. 119).

Прикладом неполярних діелектриків є гази N_2 , H_2 , O_2 , CO_2 , CH_4 . Молекули таких діелектриків називаються **неполярними**. Дипольний момент таких молекул за відсутності зовнішнього електричного поля дорівнює нулю.

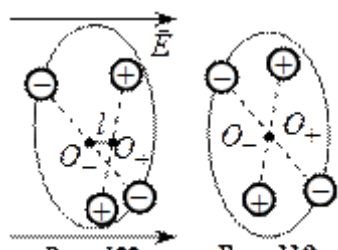


Рис. 122

Рис. 119

II. Полярні діелектрики – це діелектрики, в яких центри мас позитивних і негативних зарядів не збігаються, тобто мають асиметричну будову (рис. 120).

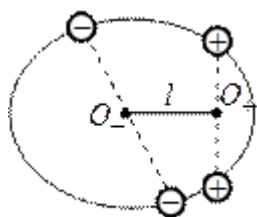


Рис. 120

До полярних діелектриків належать гази SO_2 , H_2S , NH_3 та ін., рідини – вода H_2O , соляна кислота HCl , бензол C_6H_6 тощо.

Молекули таких діелектриків називають **полярними**. Ці молекули за відсутності зовнішнього поля мають дипольні моменти $\vec{P}_0 = q\vec{l}$. Їх називають жорсткими диполями.

III. Іонні діелектрики – це речовини, молекули яких мають іонну будову.

Прикладом таких діелектриків є $NaCl$, KCl та інші.

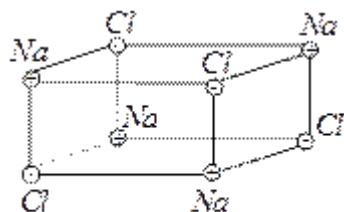


Рис. 121

Іонні кристали є просторовими ґратками з правильним чергуванням іонів різних знаків (рис. 121). У цих кристалах не можна виділити окремі молекули. Іонні кристали необхідно розглядати як систему вміщених одна в одну іонних підґраток. У цих діелектриках кожна пара сусідніх різноіменних іонів подібна до диполя.

хаотично розкидає диполі і заважає орієнтації всіх векторів $\vec{P}$ (дипольних моментів) вздовж поля. Внаслідок спільної дії цих двох факторів в діелектрику переважає орієнтація дипольних моментів молекул вздовж поля. Ця орієнтація буде тим повнішою, чим сильніше електричне поле в діелектрику і чим слабший тепловий рух молекул, тобто чим нижча температура. Цей процес називають **орієнтаційною поляризацією** діелектрика.

III. Іонні діелектрики. Іонна поляризація.

У кристалічних діелектриках, які мають кубічні кристалічні ґратки ($NaCl$, KCl , NaI та інші) під дією електричного поля всі позитивні іони зміщуються в напрямку напруженості поля $\vec{E}$, а всі негативні іони – в протилежному напрямку (рис. 125). При цьому в кожній одиниці об'єму кристала перебуває однакова кількість позитивних і негативних іонів, а на кожній з двох протилежних граней кристала, перпендикулярних до вектора напруженості електричного поля, містяться іони якого-небудь одного знака. Такий вид поляризації називають **іонною поляризацією**.

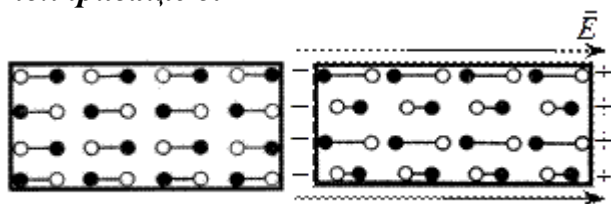


Рис. 125

Заряди, які виникають на гранях діелектрика, не вільні, вони зв'язані з атомами та молекулами речовини.

*Явище обмеженого зміщення зарядів в атомах і молекулах або напрямленої орієнтації дипольних моментів жорстких молекул в зовнішньому електричному полі, внаслідок якого на поверхні діелектрика виникають зв'язані електричні заряди, називається **поляризацією діелектриків**.*

Ступінь поляризації діелектрика характеризується вектором поляризації, або поляризованістю.

Вектором поляризації називають границю відношення електричного моменту деякого об'єму діелектрика до цього об'єму, коли об'єм прямує до нуля:

$$\vec{P} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \vec{P}_i}{V},$$

де $\vec{P}_i$ – дипольний момент i -го диполя, n – кількість диполів, які знаходяться в об'ємі V . Отже, вектор $\vec{P}$ є дипольним моментом одиниці об'єму діелектрика, який виникає при його поляризації.

Для однорідного діелектрика, який перебуває в однорідному електричному полі, справедлива рівність:

$$\vec{P} = n \vec{p},$$

де n – кількість молекул в одиниці об'єму, $\vec{p}$ – дипольний момент молекули.

Оскільки

$$\vec{P} = \beta \epsilon_0 \vec{E}, \text{ то } \vec{P} = n \beta \epsilon_0 \vec{E}.$$

Позначимо

$$n\beta = \chi, \text{ отже, } \vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}.$$

Коефіцієнт χ називається **діелектричною сприйнятливістю** речовини або поляризованістю одиниці об'єму діелектрика. χ – величина безрозмірна ($\chi \approx 80$ для води, $\chi \approx 25$ для спиртів).

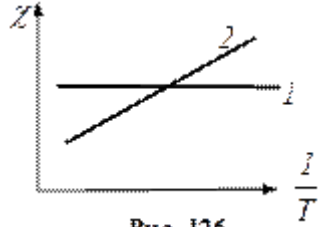


Рис. 126

На рис. 126 подано залежність діелектричної сприйнятливості χ від $\frac{1}{T}$ у випадку неполярних (1) і полярних (2) молекул. Поляризація неполярних діелектриків не залежить від температури ($\chi = const$). Для полярних діелектриків, як показав Дебай,

$$\chi = \frac{np_0^2}{3\epsilon_0 kT}.$$

При нагріванні полярного діелектрика діелектрична сприйнятливість зменшується.

Електричне поле в речовині. Теорема Остроградського-Гаусса для електростатичного поля в діелектрику. Електричне зміщення

Для встановлення кількісних закономірностей поля в діелектрику внесемо в однорідне зовнішнє електростатичне поле, яке створюється двома нескінченними паралельними різнойменно зарядженими пластинами, пластину з однорідного діелектрика (рис. 127).

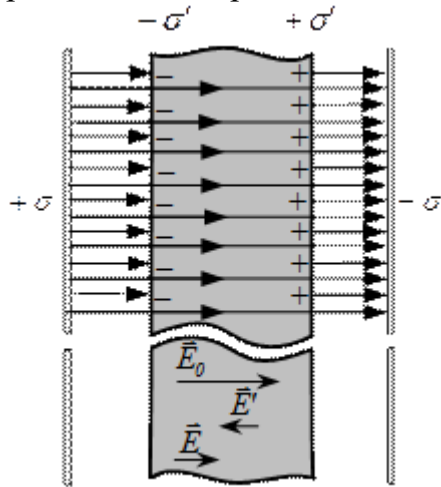


Рис. 127

Під дією поля діелектрик поляризується, тобто відбувається зміщення зарядів. Внаслідок цього на правій грані діелектрика буде надлишок позитивного заряду з поверхневою густиною $+\sigma'$, на лівій – від'ємного заряду з поверхневою густиною $-\sigma'$. Ці некомпенсовані заряди, що появляються внаслідок поляризації діелектрика, називаються зв'язаними. Оскільки їх поверхнева густина σ' менша від густини σ вільних зарядів площин, то не все

поле $\vec{E}_0$ компенсується зарядами діелектрика: на границі діелектрика відбувається розрив ліній напруженості зовнішнього електричного поля. Отже, поляризація діелектрика викликає зменшення в ньому поля порівняно з початковим зовнішнім полем. Поза діелектриком $\vec{E} = \vec{E}_0$.

Поява зв'язаних зарядів приводить до виникнення електричного поля $\vec{E}'$, яке ослаблює $\vec{E}_0$.
Результуюче поле всередині діелектрика:

$$E = E_0 - E'$$

Оскільки поля E_0 і E' створені двома нескінченними зарядженими площинами, то

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{і} \quad E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$$

Тому результуюче поле

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0}$$

Отже, напруженість поля при наявності діелектрика обчислюється за такою ж формулою, як і для вакууму з тією лише відмінністю, що до вільних зарядів треба додати зв'язані заряди протилежного знака.

Визначимо поверхневу густину зв'язаних зарядів σ' .

Повний дипольний момент пластинки діелектрика $P_V = PV = PSd$, де S – площа грані пластинки, d – її товщина. З іншого боку, $P_V = q'd = \sigma'Sd$. Тоді, $PSd = \sigma'Sd$, і $\sigma' = P$, тобто **поверхнева густина зв'язаних зарядів σ' дорівнює модулю вектора поляризації P** .

В загальному випадку, якщо зовнішнє електричне поле $\vec{E}_0$ утворює кут α з поверхнею діелектрика, то

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n,$$

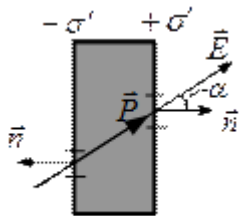


Рис. 128

де P_n – проекція вектора поляризації на напрямок нормалі поверхні. Для правої поверхні на рис. 128 $P_n > 0$, і відповідно σ' для неї позитивна; для лівої поверхні $P_n < 0$ і відповідно σ' для неї негативна. Оскільки

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}, \quad \text{то} \quad \sigma' = \chi \epsilon_0 E_n,$$

де E_n – нормальна складова напруженості поля всередині діелектрика. В тих місцях, де лінії напруженості виходять із діелектрика ($E_n > 0$), на поверхні будуть позитивні зв'язані заряди, там же, де лінії напруженості входять в діелектрик ($E_n < 0$), появляются негативні поверхневі заряди.

Оскільки

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}, \text{ а } \sigma' = P = \chi \epsilon_0 E, \text{ то}$$

$$E = E_0 - \chi E.$$

Звідси напруженість поля в середовищі

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi} = \frac{E_0}{\epsilon},$$

де $\epsilon = 1 + \chi$ – **відносна діелектрична проникність діелектрика**, яка характеризує поляризаційні властивості діелектрика.

Відносна діелектрична проникність діелектрика дорівнює його діелектричній сприйнятливості, збільшеній на одиницю і показує, у скільки разів напруженість E_0 електричного поля, утвореного зарядами у вакуумі, більша, ніж напруженість E поля цих зарядів у діелектрику.

Величини χ і ϵ – безрозмірні і для вакууму $\chi = 0$, $\epsilon = 1$.

Якщо відносна діелектрична проникність діелектрика дорівнює ϵ , то

$$E = \frac{E_0}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0}.$$

З іншого боку,

$$E = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0}$$

Прирівнюючи праві сторони, отримуємо

$$\frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0} \text{ і } \sigma' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \sigma.$$

За цією формулою можна обчислити поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів, а, отже, і вектор поляризації $\vec{P}$, бо поверхневу густину σ вільних зарядів можна визначити експериментально. Всі отримані в попередніх параграфах формули, які описують електричні поля і взаємодії електричних зарядів у вакуумі, залишаються справедливими і якщо ці явища спостерігаються в однорідному ізотропному діелектрику. Тільки у формули, що містять електричну сталу ϵ_0 , треба ввести відносну діелектричну проникність ϵ як співмножник при ϵ_0 :

$$F = \frac{|q_1 q_2|}{4 \pi \epsilon_0 \epsilon r^2},$$

закон Кулона –

$$E = \frac{|q|}{4 \pi \epsilon_0 \epsilon r^2},$$

напруженість електричного поля точкового заряду –

$$\phi = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 \epsilon r}.$$

потенціал електричного поля точкового заряду –

Напруженість електричного поля залежить від властивостей середовища: нормальна складова напруженості поля при переході з вакууму в середовище зменшується в ϵ разів. На границі

двох діелектриків нормальні складові $\vec{E}$ обернено пропорційні до ε , тобто вектор напруженості при переході через границю діелектриків стрибкоподібно змінюється, створюючи тим самим незручності при розрахунку електричних полів.

У §50 було розглянуто теорему Остроградського-Гаусса для потоку вектора напруженості електричного поля у вакуумі:

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i,$$

де q_i - вільні заряди.

Узагальнимо цю теорему для випадку електричного поля у діелектрику, в якому поле створюється як вільними, так і зв'язаними зарядами. Тому

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\sum_{i=1}^N q_i + q' \right),$$

де q' - зв'язані заряди.

Це співвідношення не можна використати для розрахунку електричного поля $\vec{E}$ в діелектрику, оскільки це поле залежить від величини зв'язаних зарядів, які у свою чергу визначаються полем $\vec{E}$.

Нехай шар однорідного неполярного діелектрика розміщений між двома нескінченими паралельними площинами, зарядженими з поверхневими густинами вільних зарядів $+\sigma$ і $-\sigma$ (рис. 129). В діелектрику індуються диполі (● - негативні заряди, ○ - позитивні заряди), електричні моменти яких паралельні до $\vec{E}$. Виберемо малу ділянку dS поверхні S , яка охоплює як вільні, так і зв'язані заряди. Молекули-диполі електрично нейтральні. Тому внесок в q' роблять лише ті диполі, які перетинаються поверхнею S . Вектор $\vec{E}$ в межах площадки dS всюди однаковий і утворює кут α із зовнішньою нормаллю $\vec{n}$.

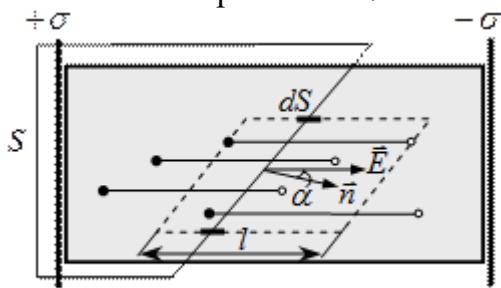


Рис. 129

Площадка dS перетинає лише ті dn диполів, центри яких знаходяться всередині, показаного на рис. 129 штриховою лінією, косою циліндра з основою площею dS і твірною, довжина якої дорівнює довжині l молекули-диполя:

$$dn = n dV = n l dS \cos \alpha,$$

де n - концентрація молекул діелектрика. Поверхнею S охоплюються негативні заряди диполів і їх величина

$$dq' = -q dn = -n q l dS \cos \alpha =$$

$$= -np d\vec{S} \cos \alpha = -(\vec{P} d\vec{S}),$$

а $\vec{P} = n\vec{p}$ - вектор поляризації діелектрика. Отже, величина зв'язаних зарядів рівна

$$q' = -\oint_S (\vec{P} d\vec{S})$$

В результаті,

$$\oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \left(q - \oint_S (\vec{P} d\vec{S}) \right)$$

або

$$\oint_S \epsilon_0 (\vec{E} d\vec{S}) + \oint_S (\vec{P} d\vec{S}) = q$$

В обох інтегралах, що стоять зліва, інтегрування проводиться по одній і тій же замкненій поверхні S . Тому

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = q$$

Вектор $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ називається **електричним зміщенням**.

В результаті рівняння, яке виражає **теорему Остроградського-Гаусса для електричного поля в середовищі**, можна записати у вигляді:

$$\Phi_D = \oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = q$$

або

$$\Phi_D = \oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \sum_{i=1}^N q_i$$

де Φ_D - потік електричного зміщення.

Згідно з цією теоремою *потік електричного зміщення електричного поля через довільну замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі вільних зарядів, що охоплюються цією поверхнею*.

Вектор поляризації $\vec{P}$ пропорційний до напруженості поля в діелектрику. Отже,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$$

З чим можна зв'язати вектор електричного зміщення? Зв'язані заряди появляються в діелектрику при наявності зовнішнього електричного поля, що створюється системою вільних зарядів, тобто в діелектрику на поле вільних зарядів накладається додаткове поле зв'язаних зарядів.

Результуюче поле в діелектрику описує вектор напруженості $\vec{E}$ і тому він залежить від властивостей діелектрика. Вектор $\vec{D}$ від середовища не залежить і описує електростатичне поле, що створюється вільними зарядами. Зв'язані заряди, що виникають в діелектрику, викликають перерозподіл вільних зарядів. Тому вектор $\vec{D}$ характеризує електростатичне поле, що створюється вільними зарядами (тобто у вакуумі), але при такому їх розподілі в просторі, який є при наявності діелектрика.

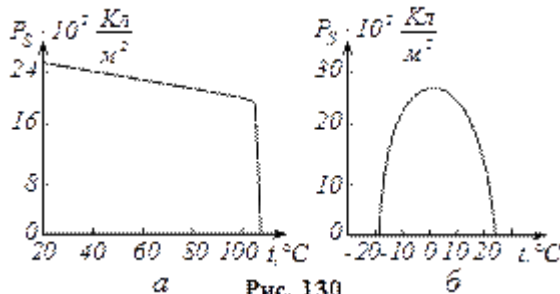
Вектор $\vec{D}$ не залежить від властивостей середовища тоді, коли поле створюється зарядженими провідниками в однорідному, ізотропному і безмежному середовищі.

Лінії вектора $\vec{E}$ можуть починатися і закінчуватися як на вільних, так і зв'язаних зарядах, а лінії вектора $\vec{D}$ – лише на вільних зарядах. Через області поля, де знаходяться зв'язані заряди, лінії вектора $\vec{D}$ проходять, не перетинаючись.

Сегнетоелектрики.

Сегнетоелектриками називаються кристалічні діелектрики, які володіють в певному інтервалі температур самочинною (спонтанною) поляризацією, яка досить сильно змінюється під впливом зовнішніх впливів – електричного поля, деформацій, температури.

Кристалографічна модифікація, в якій сегнетоелектрик поляризований ($P_S \neq 0$), називається сегнетоелектричною фазою, а модифікація в якій $P_S = 0$ - параелектричною фазою. При зміні температури відбувається перехід, що називається фазовим переходом, із сегнето- в параелектричну фазу. Температура, при якій кристал зазнає фазового переходу, називається точкою Кюрі T_C . Деякі кристали, зокрема сегнетова сіль, мають дві



точки

а

Рис. 130

б

Кюрі. Температурна залежність спонтанної

поляризації BaTiO_3 наведена на рис. 130а, а сегнетової солі – на рис. 130б.

Сегнетоелектричні фазові переходи є оборотними, тобто можуть відбуватися в обох напрямках. Це означає, що як від нагрівання кристала спонтанна поляризація зникає при певній температурі, то й від охолодження вона виникає в ньому при тій самій температурі.

Характерна особливість сегнетоелектриків полягає в тому, що у певному температурному інтервалі різко зростає відносна діелектрична проникність.

Як видно з рис. 131, відносна діелектрична проникність ε тригліцинсульфату при збільшенні температури зростає, досягаючи максимального значення $\varepsilon \approx 2500$ при $t_c = 49^\circ\text{C}$. Після наступного нагрівання ε зменшується.

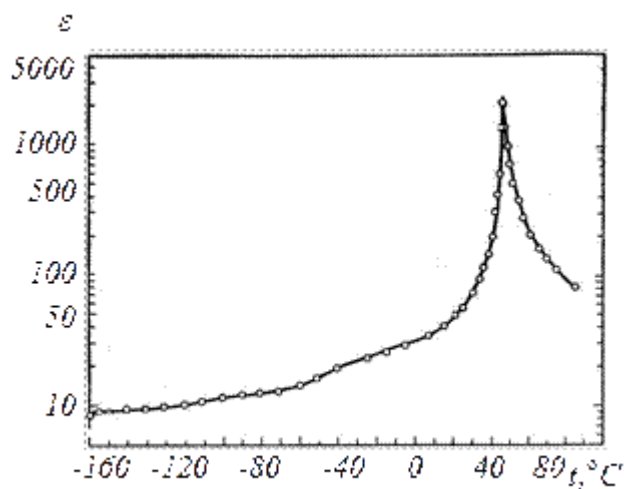


Рис. 131

Відносна діелектрична проникність ε і діелектрична сприйнятливість χ сегнетоелектриків залежить від напруженості електричного поля в речовинах.

На рис. 132а наведено залежність діелектричної проникності від напруженості поля для сегнетоелектриків. Як видно, ця залежність не є лінійною. Тому для сегнетоелектриків немає прямої пропорційності між векторами електричного зміщення $\vec{D}$, поляризації $\vec{P}$ і напруженістю електричного поля $\vec{E}$.

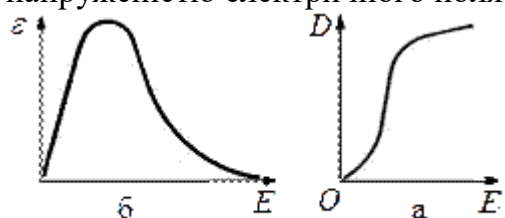


Рис. 132

При не дуже сильних полях в сегнетоелектриках електричне зміщення $\vec{D}$ залежить від напруженості поля $\vec{E}$ нелінійно (рис. 132б). Нелінійне зростання D із збільшенням E замінюється лінійним лише при дуже великих значеннях E .

Для сегнетоелектриків характерне явище діелектричного гістерезису, яке полягає у відставанні змін вектора поляризації $\vec{P}$ від змін вектора напруженості $\vec{E}$ електричного поля (рис. 133).

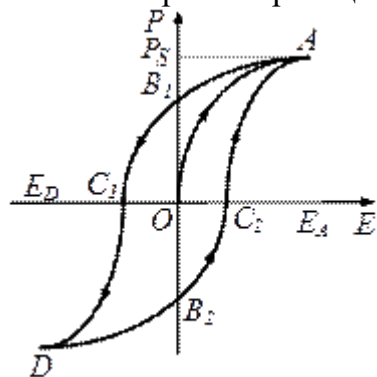


Рис. 133

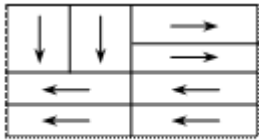


Рис. 134

Якщо неполяризований сегнетоелектрик помістити в електричне поле і збільшувати напруженість поля E , то викликана цим полем поляризація зростає вздовж кривої OA , яка називається основною кривою поляризації сегнетоелектрика. E_A - напруженість поля, при якій досягається величина спонтанної поляризації P_S .

При зменшенні поля E поляризація зменшується не вздовж кривої AO , а вздовж кривої AB_1 , причому в точці B_1 зовнішнє поле відсутнє, але сегнетоелектрик поляризований. При зміні напрямку зовнішнього поля вектор поляризації зменшується до нуля в точці C_1 , а потім, змінивши свій напрямок, зростає за величиною вздовж кривої C_1D . Наступна зміна зовнішнього поля від E_D до E_A супроводжується зміною вектора поляризації вздовж кривої DB_2C_2A . В точках B_1 і B_2 спостерігається **залишкова поляризація**. Величина напруженості поля в точках C_1 і C_2 , при якій поляризація сегнетоелектрика дорівнює нулю, називається **коерцитивною силою**.

При періодичній зміні поляризації сегнетоелектрика на подолання тертя під час повертання електричних моментів витрачається електрична енергія, яка йде на нагрівання сегнетоелектрика. Площа петлі гістерезису пропорційна до електричної енергії, що перетворюється у внутрішню енергію в одиниці об'єму сегнетоелектрика за один цикл.

Характерною особливістю сегнетоелектриків є те, що паралельна орієнтація дипольних моментів елементарних комірок має місце тільки в невеликих областях кристалу – **доменах**. Доменами називають сукупності спонтаннополяризованих елементарних комірок з паралельним розміщенням дипольних моментів. Домени в кристалі сегнетоелектрика орієнтовані хаотично, тобто мають різні напрямки спонтанної поляризації (рис. 134). Тому різні ділянки граней сегнетоелектричних кристалів мають неоднакову макроскопічну поляризацію. За відсутності поля області спонтанної поляризації розміщуються так, що електричні дипольні моменти різних доменів компенсують один одного і середня поляризація сегнетоелектрика дорівнює нулю.

Якщо внести кристал сегнетоелектрика у зовнішнє поле, відбувається переорієнтація електричних моментів доменів і весь кристал стає поляризованим.

П'єзоефект — виникнення [електричних зарядів](#) (п'єзоелектрики) на гранях деяких [кристалів](#) при їхній [деформації](#) (прямий п'єзоефект), або навпаки — виникнення деформації цих [кристалів](#) внаслідок дії [електричного поля](#) (зворотний п'єзоефект).

Перші дослідження п'єзоефекту були виконані французькими фізиками Жаком і [П'єром Кюрі](#) в [1880](#) році на кристалі [кварцу](#).^[1] П'єзоефект властивий понад 1500 речовинам.

Спостерігається у всіх [сегнетоелектриках](#) і у багатьох [піроелектриках](#). На відміну від [електрострикції](#), п'єзоефект залежить від напряму [силових ліній](#) поля, тому дія на площини кристалу змінних [електричних полів](#) призводить до його [вібрації](#).

Найбільша амплітуда коливань кристалу має місце у випадку, коли частота коливань поля відповідає резонансній частоті коливань кристалу.

Ступінь поляризації кристалу при п'єзоефекті прямо пропорційний механічному напруженню. Коефіцієнт пропорційності між ними називається п'єзоелектричним модулем. Для характеристики п'єзоефекту використовують відношення п'єзомодуля порід до п'єзомодуля монокристалу кварцу. Найбільший п'єзоефект має жильний кварц (10% від модуля монокристалу), п'єзомодуль кварцитів — 1% від модуля монокристалу, гнейсів і гранітів — 0,2-0,5%.

№ 3.130

Нескінченна плоскопаралельна скляна пластина ($\epsilon = 7$) вміщена в однорідне електричне поле перпендикулярно до нього. Напруженість поля $E_0 = 400$ В/м. Визначити напруженість поля E та електричне зміщення D та поверхневу густину σ' зв'язаних зарядів.

Відп. $E = E_0/\epsilon = 57,1$ В/м ; $D = \epsilon_0 E_0 = 3,54$ нКл/м²; $P = \epsilon_0 E_0(\epsilon - 1) / \epsilon = 3,03$ нКл/м²
 $\sigma' = \pm P = \pm 3,03$ нКл/м²

Матеріал для самостійного вивчення з теми:

2.1.1.4. Електроємність відокремленого провідника та системи провідників.

Конденсатори. Обчислення електроємності найпростіших конденсаторів. Послідовне та паралельне з'єднання конденсаторів. Енергія зарядженого відокремленого провідника, конденсатора. Енергія електричного поля. Об'ємна густина енергії електричного поля.

Електроємність відокремленого провідника. Конденсатори

Відокремленим називається провідник, який знаходиться настільки далеко від інших тіл, що впливом їх електричних полів можна знехтувати.

Якщо надати відокремленому провіднику, який знаходиться в однорідному, ізотропному середовищі з відносною діелектричною проникністю ϵ деякий заряд q , то цей заряд розподілиться на поверхні провідника з різною поверхневою густиною σ . Характер розподілу зарядів залежить лише від форми провідника. Кожна нова порція зарядів, які надають провіднику, розподіляються на його поверхні подібно до попередньої. Тому поверхнева густина зарядів σ в кожній точці поверхні провідника пропорційна його заряду q :

$$\sigma = k q$$

де $k = f(x, y, z)$ - функція координат точки, що залежить від форми і розмірів провідника.

Використовуючи принцип суперпозиції електростатичних полів, знайдемо потенціал зарядженого відокремленого провідника. Для цього поділимо поверхню S провідника на нескінченно малі елементи dS , які мають точковий заряд σdS . Інтегруючи по всій замкнутій поверхні S провідника вираз для потенціалу $d\varphi$ точкового заряду, отримуємо

$$\varphi = \oint_S \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \oint_S \frac{k dS}{r}$$

де r – відстань від малого елемента dS провідника до якої-небудь фіксованої точки на поверхні провідника, в якій визначається потенціал φ . Вибір цієї точки довільний, оскільки поверхня провідника еквіпотенціальна. Інтеграл залежить лише від форми і розмірів провідника і тому потенціал φ відокремленого провідника прямо пропорційний його заряду q , тобто

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \oint_S \frac{k dS}{r}$$
$$\varphi = \frac{q}{C},$$

де - електрична ємність.

Електроємність відокремленого провідника числово дорівнює електричному заряду, який треба надати цьому провіднику, щоб потенціал змінився на одиницю.

Електроємність відокремленого провідника залежить від його форми і розмірів, причому геометрично подібні провідники мають ємності, прямо пропорційні до їхніх лінійних розмірів.

Електроємність прямо пропорційна до діелектричної проникності середовища.

Електроємність не залежить ні від матеріалу провідника, ні від його агрегатного стану, ні від форми і розмірів можливих порожнин всередині нього. Це пов'язано з тим, що надлишкові заряди розподілені тільки на зовнішній поверхні провідника. Електроємність не залежить також від заряду провідника та його потенціалу.

Одиниця ємності – фарада:

1 фарада – це ємність такого провідника, потенціал якого змінюється на 1 В при наданні йому заряду в 1 Кл.

Оскільки потенціал відокремленої кулі радіусом R , яка має заряд q дорівнює

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R},$$

то ємність кулі

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R.$$

1 фарада – це ємність провідника у формі кулі, радіус якої

$$R = \frac{C}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ км}; \quad \frac{R}{R_{\text{землі}}} \approx 1406.$$

Для того, щоб провідник мав велику ємність, він повинен мати дуже великі розміри. На практиці, однак, необхідні пристрої, які мають здатність при малих розмірах і невеликих відносно навколишніх тіл потенціалах нагромаджувати значні за величиною заряди. Ці пристрої – **конденсатори**.

Конденсатор складається з двох провідників, які розділені діелектриком. Щоби на ємність конденсатора не впливали навколишні тіла, провідникам надають таку форму, щоб поле, яке створюється зарядами, було зосереджено у вузькому проміжку між обкладками конденсатора.

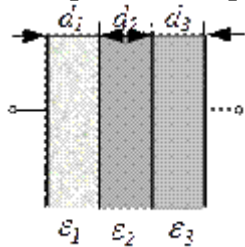


Рис. 140

Оскільки поле зосереджене всередині конденсатора, то лінії напруженості починаються на одній обкладці і закінчуються на іншій і тому вільні заряди, що виникають на різних обкладках, є однаковими за модулем різнойменними зарядами.

Ємність конденсатора – фізична величина, що числово дорівнює відношенню величини заряду q , нагромадженого у конденсаторі, до різниці потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ між його обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

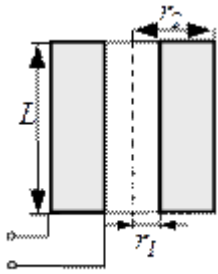


Рис. 141

Залежно від форми обкладок конденсатори поділяються на плоскі, циліндричні і сферичні.

I. Плоский конденсатор.

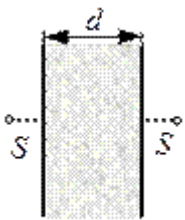


Рис. 139

Якщо обкладки конденсатора мають форму паралельних між собою пластин, то його називають плоским (рис. 139). Площа пластин конденсатора S і якщо лінійні розміри пластин великі порівняно з d , то електричне поле між пластинами можна вважати еквівалентним полю між двома нескінченними площинами, які заряджені різнойменно і поверхневі густини яких дорівнюють $+\sigma$ і $-\sigma$. Крім того, відстань d повинна бути настільки малою, щоб порушення однорідності поля поблизу його країв можна було не брати до уваги. Напруженість електричного поля і різниця потенціалів між обкладками конденсатора в цьому випадку дорівнюють:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0 S}, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0 S} d,$$

де ϵ - відносна діелектрична проникність середовища, що заповнює простір між пластинами. Отже, ємність плоского конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}.$$

Ємність конденсатора, який має шаруватий діелектрик (рис. 140), визначають за формулою:

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} + \frac{d_3}{\epsilon_3}}.$$

II. Циліндричний конденсатор.

Циліндричний конденсатор утворюють дві металеві трубки різних радіусів, вставлені одна в одну аксіально, тобто так, що їх осі збігаються, і розділені шаром діелектрика (рис. 141). Поза конденсатором поля, створені внутрішньою і зовнішньою обкладками, взаємно знищуються.

Поле створюється між обкладками тільки зарядом циліндра радіусом r_1 , оскільки заряд зовнішнього циліндра всередині конденсатора не створює електричного поля. Різниця потенціалів між обкладками циліндричного конденсатора

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon L} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Тоді ємність циліндричного конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon L}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Якщо шар діелектрика $d = r_2 - r_1$ дуже тонкий, то

$$\ln \frac{r_2}{r_1} = \ln \frac{r_1 + d}{r_1} = \ln \left(1 + \frac{d}{r_1} \right) \approx \frac{d}{r_1}$$

і

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon L r_1}{d}.$$

Але $2\pi r_1 L = S$ — площа обкладки циліндричного конденсатора. В результаті

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}.$$

Коли обкладки циліндричного конденсатора розділені дуже тонким шаром діелектрика, його електроємність з достатньою точністю можна обчислити за формою плоского конденсатора.

III. Сферичний конденсатор.

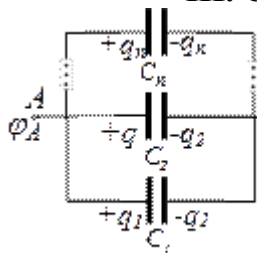


Рис. 143

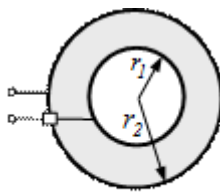


Рис. 142

Обкладки такого конденсатора — це дві концентричні провідні сфери з радіусами r_1 і r_2 , розділені тонким шаром діелектрика завтовшки d (рис. 142) і $d = r_2 - r_1$. Поля поза конденсатором, створені внутрішньою та зовнішньою обкладками, взаємно знищуються. Поле між обкладками створюється зарядом q кулі радіусом r_1 , а заряд $-q$ зовнішньої кулі всередині цієї кулі не створює електричного поля. Різниця потенціалів між обкладками конденсатора дорівнює

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Тоді електроємність сферичного конденсатора

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Якщо товщина шару діелектрика d мала, то можна вважати $r_1 \approx r_2$. Тоді

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1^2}{d} = \frac{\epsilon\epsilon_0 4\pi r_1^2}{d} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d},$$

де $S = 4\pi r_1^2$ - площа обкладки конденсатора.

Коли сферичний конденсатор має дуже тонкий шар діелектрика, його електроємність можна обчислювати за формулою ємності плоского конденсатора.

Конденсатор характеризується не лише електроємністю, а й „пробивною напругою” – різницею потенціалів між його обкладками, при якій може відбутися пробій, тобто електричний розряд через шар діелектрика в конденсаторі. Величина пробивної напруги залежить від властивостей діелектрика, його товщини і форми обкладок.

Для збільшення ємності і варіювання її можливих значень конденсатори з'єднують в батареї.

Паралельне з'єднання конденсаторів.

Щоб отримати велику електроємність, кілька конденсаторів з'єднують в батарею так, щоб всі позитивно заряджені обкладки мали один спільний електрод, а заряджені негативно – інший (рис. 143). Таке з'єднання називається **паралельним**. При цьому кілька конденсаторів немовби замінюють одним, у якого площа обкладок дорівнює сумі площ обкладок складових конденсаторів.

Різниця потенціалів між обкладками всіх конденсаторів C_1, C_2, C_n , незалежно від ємності, однакова і дорівнює різниці потенціалів $\varphi_A - \varphi_B = U$. При цьому на кожному з них містяться заряди:

$$q_1 = C_1 U, \quad q_2 = C_2 U, \quad \dots, \quad q_n = C_n U.$$

Заряд всієї батареї розподіляється між обкладками конденсатора так, що

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n,$$

або

$$q = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) U.$$

Крім того, заряд q батареї можна виразити через її електроємність $C_{\text{пар}}$ та напругу на її клеммах: $q = C_{\text{пар}} U$.

Прирівнюючи два вирази для заряду q , отримуємо

$$C_{\text{пар}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i.$$

Якщо батарея складається з n однакових паралельно з'єднаних конденсаторів ємністю C кожен, то її електроємність

$$C_{\text{пор}} = C_n$$

З'єднувати паралельно доцільно такі конденсатори, у яких однакова робоча напруга.

Послідовне з'єднання конденсаторів.

При послідовному з'єднанні конденсаторів негативно заряджену обкладку першого конденсатора з'єднують з позитивно зарядженою обкладкою другого і т.д. (рис. 144).

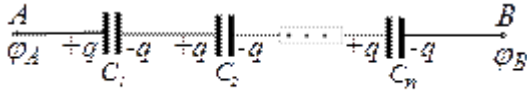


Рис. 144

Якщо на батарею подати напругу $U = \varphi_A - \varphi_B$, то до такої різниці потенціалів зарядяться тільки крайні обкладки першого і останнього конденсатора, причому

$$U = \varphi_A - \varphi_B = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + (\varphi_{n-1} - \varphi_n).$$

Провідник, що з'єднує негативно заряджену обкладку першого та позитивно заряджену обкладку другого конденсатора, можна розглядати разом з обкладками як одне провідне тіло. Внаслідок явища електростатичної індукції вільні заряди цього тіла під дією поля прикладеної напруги перерозподіляються так, що на одній обкладці з'являється негативний заряд $-q$, а на іншій – позитивний $+q$. Тому можна зробити висновок, що заряди на всіх послідовно з'єднаних конденсаторах, незалежно від їх ємності, однакові і дорівнюють заряду всієї батареї, тобто

$$q = q_1 = q_2 = \dots = q_n.$$

Ємність батареї послідовно з'єднаних конденсаторів

$$C_{\text{пор}} = \frac{q}{\varphi_A - \varphi_B},$$

звідки

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{q}{C_{\text{пор}}}.$$

$$\text{Для першого конденсатора} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C_1},$$

$$\text{для другого} \quad \varphi_2 - \varphi_3 = \frac{q}{C_2} \text{ і т.д. Тоді}$$

$$\frac{q}{C_{\text{пор}}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots + \frac{q}{C_n}.$$

Після скорочення на q отримуємо формулу для обчислення електроємності батареї послідовно з'єднаних конденсаторів:

$$\frac{1}{C_{\text{пор}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}.$$

Якщо послідовно з'єднано n однакових конденсаторів з ємністю C кожен, то

$$C_{\text{конт}} = \frac{C}{n}.$$

Послідовно з'єднують конденсатори для підвищення робочої напруги, яку можна подати на батарею конденсаторів.

Енергія зарядженого відокремленого провідника, конденсатора. Енергія електростатичного поля.

Нехай в однорідному ізотропному середовищі знаходиться відокремлений провідник, заряд якого q , потенціал φ і електроємність C . Для збільшення заряду цього провідника на dq , треба перенести цей заряд з нескінченності до поверхні провідника. При цьому треба виконати роботу проти сил електростатичного поля, яка дорівнює

$$dA = \varphi dq.$$

Щоб зарядити провідник від нульового заряду до q , треба виконати роботу

$$A = \int_0^q \varphi dq = \int_0^q \frac{q}{C} dq = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

Енергія зарядженого провідника числово дорівнює тій роботі, яку треба виконати, щоб зарядити цей провідник,

тобто

$$W_{\epsilon} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C}.$$

Під час зарядження конденсатора витрачається робота із перенесення електричних зарядів з однієї обкладки на іншу. Енергію зарядженого конденсатора визначають за формулою:

$$W_{\epsilon} = \frac{C\Delta\varphi^2}{2} = \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

де $\Delta\varphi$ – різниця потенціалів між обкладками конденсатора.

Енергію зарядженого конденсатора можна визначити через величини, які характеризують електричне поле в проміжку між обкладками плоского конденсатора. Для цього у формулу

$$W_{\epsilon} = \frac{C\Delta\varphi^2}{2}$$

підставимо значення C і $\Delta\varphi$:

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}, \quad \Delta\varphi = Ed.$$

Тоді

$$W_{\epsilon} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon\epsilon_0 S E^2 d = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V,$$

де $V = Sd$ – об'єм конденсатора.

Отже, енергія конденсатора виражається через величину, яка характеризує електростатичне поле – напруженість поля $\vec{E}$.

Електростатичне поле як одна з форм матерії існує в часі і просторі. Енергія є однією з характеристик стану матерії. Тому енергія нерозривно пов'язана з її матеріальним носієм – електричним полем. Енергія електричного поля локалізована у просторі, де існує це поле.

$$W_e = \frac{q\Delta\varphi}{2}$$

Вираз відповідає положенням теорії далекодії, де W розглядається як потенціальна енергія заряджених тіл, що притягуються або відштовхуються один від одного.

$$W_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V$$

Формула відповідає уявленню теорії поля (теорії близькодії), де вважається, що енергія, подібно до речовини, розподілена у просторі з **об'ємною густиною**

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}$$

В ізотропному діелектрику напрямки векторів $\vec{E}$ і $\vec{D}$ співпадають. Тому

$$w_e = \frac{(\vec{E}, \vec{D})}{2}$$

Враховуючи, що електричне зміщення $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, отримуємо для w_e наступний вираз:

$$w_e = \frac{\vec{E}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{D})}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\vec{E}\vec{P}}{2}$$

Перший доданок відповідає густині енергії поля $\vec{E}$ у вакуумі. Другий доданок – це густина енергії, яка витрачається на поляризацію діелектрика.

Дослідження неоднорідних електричних полів, утворених довільними зарядженими тілами,

показали, що для них формула $W_e = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2 V$ незастосовна, бо $E \neq const$, а вираз для w_e визначає об'ємну густина енергії в кожній точці будь-якого електричного поля.

У випадку неоднорідного електричного поля енергія dW_e нескінченно малого об'єму dV поля дорівнює

Інтегруючи dW_e по всьому об'єму V поля, знаходимо повну енергію W_e електростатичного поля:

$$W_e = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 \int_V E^2 dV$$

Лекція № 11

Тема: Електричний струм. Сила і густина струму. Джерела струму. Сторонні сили. Електрорушійна сила і напруга. Закон Ома для однорідної і неоднорідної ділянки кола. Закон Ома для повного кола. Опір провідників. Залежність опору металів від температури. Надпровідність. Закон Ома в диференціальній формі. Послідовне і паралельне з'єднання

провідників. Розгалужені кола. Правила Кірхгофа. Робота і потужність струму. Закон Джоуля-Ленца.

Мета: поглибити знання студентів про електричний струм та його основні характеристики, сформулювати поняття ЕРС джерела електричної енергії, навчити розраховувати електричні кола.

Обладнання: джерела електричної енергії, вимірювальні прилади в колах постійного струму, магазин опорів, мультимедійний проектор.

Хід заняття.

I. Організаційний момент.

- а) готовність групи до заняття;
- б) психоемоційний настрій;
- в) перевірка присутніх.

II. Актуалізація опорних знань студентів.

1. Яка умова руху зарядів під дією сил електричного поля?
2. Як змінюється енергія заряду, що рухається під дією сил електричного поля?
3. Що таке потенціал та різниця потенціалів?

III. Виклад нового матеріалу.

План

1. Електричний струм та його основні характеристики: сила та густина струму.
2. Джерела струму. Сторонні сили. Електрорушійна сила. Напруга.
3. Закон Ома для однорідної і неоднорідної ділянки кола.

4. Послідовне і паралельне з'єднання провідників. Розширення меж вимірювання амперметра і вольтметра.

5. Закон Ома для повного кола.

6. Розгалужені кола. Правила Кірхгофа.

7. Розв'язування задач.

IV. Узагальнення та систематизація знань

1. Розв'язати задачі №№ 3.178; 3.179; 3.207 із збірника задач за ред. І.П.Гаркуші.

V. Підведення підсумків заняття.

VI. Домашнє завдання: вивчити матеріал лекції; за підручником «Загальний курс фізики» т.2 за ред. Кучерука І.М. опрацювати матеріал на с.105 – 111; 115 – 120; 126 -133 або за підручником «Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф. - с. 297 – 300; 302 – 307; розв'язати задачі №№ 2; 5 на с.316

№ 3.178

Сила струму в провіднику змінюється з часом згідно з рівнянням $I = 5 + 3t$, де I – сила струму, А; t – час, с. Яка кількість електрики q проходить через поперечний переріз провідника за час від $t_1 = 3$ с до $t_2 = 8$ с? При якій силі постійного струму I крізь поперечний переріз провідника за цей час проходить така сама кількість електрики?

Відп. . $q = 107,5$ Кл; $I = 21,5$ А.

№ 3.179

До амперметра, опір якого $R_a = 0,27$ Ом, приєднано паралельно шунт опором $R = 0,09$ Ом. Обчислити силу струму в колі, якщо амперметр показує $I = 2$ А.

Відп. $I = 8$ А.

№ 3.207

У схемі електрорушійні сили $E_1 = 1,5$ В, $E_2 = 2$ В, $E_3 = 2,5$ В, опори $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом. Внутрішнім опором джерел струму нехтувати. Визначити силу струму в усіх ділянках кола.

Відп. $I_1 = 0,032$ А, $I_2 = 0,009$ А, $I_3 = 0,023$ А.

Лекція № 11

Електричний струм. Сила і густина струму. Джерела струму. Сторонні сили. Електрорушійна сила і напруга. Закон Ома для однорідної і неоднорідної ділянки кола. Закон Ома для повного кола. Опір провідників. Залежність опору металів від температури. Надпровідність. Закон Ома в диференціальній формі. Послідовне і паралельне з'єднання провідників. Розгалужені кола. Правила Кірхгофа. Робота і потужність струму. Закон Джоуля-Ленца.

Електричний струм. Закони постійного струму

Впорядкований рух (напрявлений) заряджених частинок називається електричним струмом. Носіями зарядів можуть бути вільні електрони (електронна провідність) або іони різного знаку (іонна провідність). Кількісною характеристикою струму є його сила I і густина j .

Силою струму називають скалярну величину, що дорівнює відношенню кількості заряду Δq , що переноситься за одиницю часу через поперечний переріз провідника:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Одиниця сили струму в СІ – ампер – $[I] = A$.

Постійний струм – це струм, сила і напрям якого не змінюється. Для постійного струму:

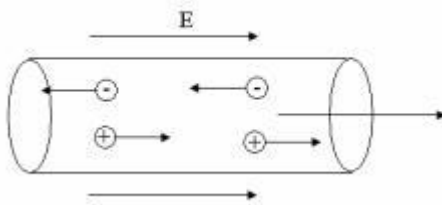
$$I = \frac{Q}{t}$$

Густина струму – векторна фізична величина. Її модуль дорівнює відношенню сили струму I до площі поперечного перерізу провідника S :

$$j = \frac{I}{S}$$

Вектор $\vec{j}$ напрямлений уздовж напрямку струму.

Технічним напрямом струму вважається напрям руху позитивних зарядів (Рис. 33). Умовою існування електричного струму є наявність вільних заряджених частинок та електричного поля в провіднику, яке діє на ці частинки із силою $\vec{F} = q\vec{E}$ і зумовлює їхній упорядкований рух.



Щоб у провіднику весь час проходив струм, необхідно підтримувати в ньому постійне електричне поле. Для переміщення заряду q по деякій ділянці провідника необхідно виконати певну роботу A . Напруга на даній ділянці чисельно дорівнює роботі по переміщенню одиничного заряду:

$$U = \frac{A}{q}$$

Щоб підтримувати струм, потрібно весь час поновлювати заряди з'єднаних тіл. Це можливо завдяки існуванню сторонніх сил. Характеризує сторонні сили фізична величина, що

називається електрорушійною силою (ЕРС). ЕРС дорівнює роботі сторонніх сил по переміщенню одиничного позитивного заряду в замкнутому електричному полі:

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{стор}}}{q}$$

Одиниця ЕРС і напруги в СІ – вольт – [U] – Дж/Кл = В.

Для кожного провідника існує залежність між силою струму в провіднику і напругою, прикладеною до його кінців.

Г. Ом експериментально встановив: на ділянці однорідного кола сила струму прямо пропорційна прикладеній напрузі U і обернено пропорційна опору ділянки R (закон Ома):

$$I = \frac{U}{R}$$

R – опір ділянки.

Електричний опір зумовлений тим, що електрони в процесі руху взаємодіють з позитивними іонами кристалічної решітки металу.

Опір провідника залежить від його довжини l, площі поперечного перерізу S і властивостей матеріалу:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

ρ – питомий опір провідника, довжина якого 1м, площа поперечного перерізу 1м²: $\rho = \frac{RS}{l}$,

$\sigma = \frac{1}{\rho}$ – питома електропровідність.

При підвищенні температури частішають зіткнення електронів з іонами, тому опір провідників залежить від температури: $R = R_0(1 + \alpha t)$

R₀ – питомий опір при 0 °С,

t – температура,

α – температурний коефіцієнт опору, який характеризує відносну зміну опору при нагріванні його на 1 К.

$$\alpha = \frac{R - R_0}{R_0 t}$$

Для багатьох металів (чистих): $\alpha \approx \frac{1}{273} \text{ K}^{-1}$

У зовнішньому колі, що має зовнішній опір R, джерело струму з ЕРС ε і внутрішнім опором r, сила струму дорівнює відношенню ЕРС до повного опору кола:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \text{ - закон Ома для повного кола}$$

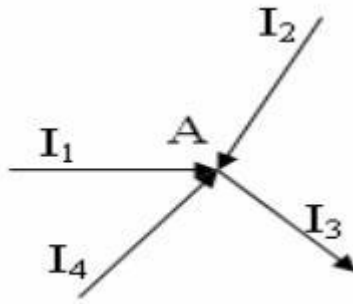


Рисунок 32

У загальному випадку на практиці часто доводиться розраховувати складні розгалужені електричні кола, які містять вузли. Вузлом (Рис. 34) А у розгалуженому колі називають точку, в якій збігається не менше трьох провідників.

Німецький вчений Г.Р.Кірхгоф встановив закони, за допомогою яких проводять розрахунки струмів і напруг у розгалужених колах.

Перше правило Кірхгофа:

Алгебраїчна сума струмів, які збігаються у вузлі дорівнює нулю.

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \text{ або } I_1 + I_2 + \dots + I_n = I$$

Друге правило Кірхгофа:

У будь-якому замкненому контурі розгалуженого кола алгебраїчна сума ЕРС дорівнює алгебраїчній сумі добутків струмів на опори відповідних ділянок цього контуру:

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i$$

або

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + \dots + I_n R_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$$

Із законів Кірхгофа випливає: опір кола з послідовно з'єднаними провідниками дорівнює сумі опорів окремих провідників (Рис.35):

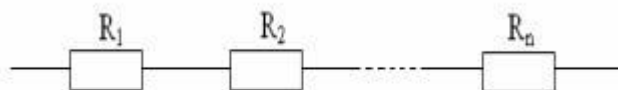


Рисунок 33

$$R_{\text{всг}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

$$I = I_1 = I_2 = \dots = I_n = \text{const}$$

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

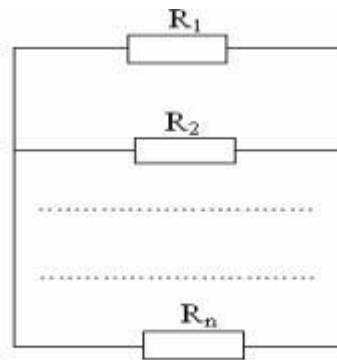


Рисунок 34

$$\frac{1}{R_{\text{всп}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

При паралельному з'єднанні провідників (Рис.36):

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_n$$

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Для зменшення опору кола в n разів паралельно до нього приєднують провідник малого опору (шунт):

$$R_{\text{ш}} = \frac{R_0}{n-1}$$

Для вимірювання сили струму амперметр вмикають в коло послідовно із споживачем.

Для вимірювання напруги вольтметр вмикають в коло паралельно споживачеві.

Опір провідників. Залежність опору від температури. Закон Ома в диференціальній формі. Надпровідність. Робота і потужність струму. Закон Джоуля- Ленца.

Електричний опір зумовлений тим, що електрони в процесі руху взаємодіють з позитивними іонами кристалічної решітки металу.

Опір провідника залежить від його довжини l , площі поперечного перерізу S і властивостей матеріалу:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

? – питомий опір провідника, довжина якого 1м, площа поперечного перерізу 1м²: $\rho = \frac{RS}{l}$,

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

ρ - питома електропровідність.

При підвищенні температури частішають зіткнення електронів з іонами, тому опір провідників залежить від температури: $R = R_0(1 + \alpha t)$

R_0 – питомий опір при 0°C ,

Закон Джоуля - Ленца

Роботу, яку виконує джерело струму з ЕРС, визначають за формулою:

$$A = \mathcal{E} I t$$

Енергія джерела струму перетворюється частково або повністю у внутрішню енергію провідника або в механічну енергію. Скориставшись законом Ома, роботу можна виразити через силу струму або напругу:

$$A = I^2 R t$$

$$A = \frac{U^2}{R} t$$

Потужність електричного струму дорівнює відношенню роботи A до часу t , протягом якого вона виконується:

$$P = \frac{A}{t} = IU$$

Одиницею потужності в СІ є Ват (Вт).

Якщо по провіднику проходить струм, то провідник нагрівається. Англійський вчений Дж. П. Джоуль і російський вчений Е. Х. Ленц встановили закон (Джоуля – Ленца): кількість теплоти, що виділяється в провіднику зі струмом, пропорційна силі струму, напрузі і часу проходження струму:

$$Q = I U t = I^2 R t$$

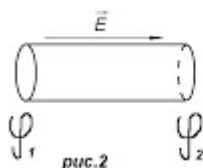
При відсутності сторонніх сил:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = IR; \quad A = Q = I U t = I^2 R t = \frac{U^2 t}{R};$$

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

Закон Ома в диференціальній формі.

Вектор густини струму в довільній точці провідного середовища визначається вектором напруженості електричного поля в цій точці та провідністю цього середовища (рис. 2).



$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Зауважу, що диференціальна форма запису закону Ома, містить величини, котрі характеризують електричний стан середовища в одній і тій же точці.

Математичне формулювання

У електротехніці заведено записувати закон Ома у вигляді

$$U = I \cdot R$$

де U — прикладена напруга, I — сила струму, R — опір провідника.

Проте опір є характеристикою провідника, а не матеріалу, й залежить від довжини та поперечного перерізу провідника. Тому в фізиці застосовують закон Ома у вигляді:

$$\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E}$$

де $\mathbf{j}$ — густина струму, σ — питома провідність матеріалу, $\mathbf{E}$ — напруженість електричного поля.

Питома провідність залежить від кількості вільних носіїв заряду в провіднику і від їхньої рухливості.

Закон Ома в диференційній формі

Величина сили струму визначається як:

$$I = \frac{\phi_1 - \phi_2}{R} = \frac{U}{R}$$

Опір

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

де питомий опір ρ

$$\rho = \frac{R \cdot S}{l}$$

Запишемо струм як

$$I = \frac{U}{R} = \frac{US}{\rho l} \quad | :s$$

де

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l}$$

втоді

$$j = \frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l}$$

але

$$\frac{1}{\rho} = \gamma$$

$$\frac{U}{l} = E$$

дістанемо

$$j = \gamma E$$

Закон Ома у векторній формі:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

Вектор густини струму дорівнює провідності, помноженій на напруженість електричного поля.

Відкриття надпровідності Камерлінг-Оннесом

Експериментуючи зі [ртуттю](#), Камерлінг-Оннес довів її до замерзання і продовжив знижувати температуру. При досягненні $T = 4,2^\circ \text{ K}$ прилад перестав фіксувати опір. Оннес міняв прилади в дослідній установці, оскільки побоювався їхньої несправності, але прилади незмінно показували нульовий опір, попри те, що до абсолютного нуля не вистачало ще 4 К.

Після відкриття надпровідності в ртуті з'явилась велика кількість запитань:

- чи надпровідність властива ртуті й іншим матеріалам? ;
- опір знижується до нуля або ж він настільки малий, що прилади, які існують, не можуть його виміряти, і багато інших.

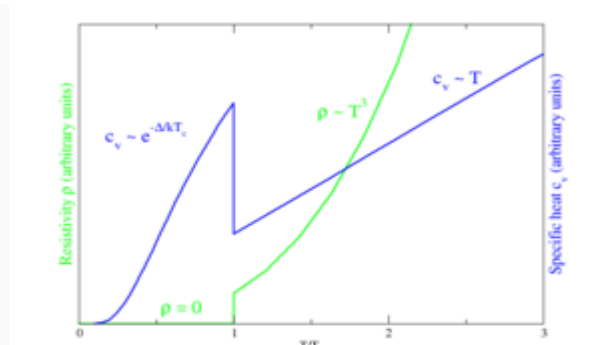
Оннес запропонував оригінальний дослід непрямого визначення, до якого рівня знижується опір. В надпровідному колі збуджувався електричний струм, який, як було встановлено за відхиленням магнітної стрілки, не згасав багато років. За розрахунками [питомий опір](#) надпровідника дорівнював близько $10^{-25} \text{ Ом}\cdot\text{м}$. Порівнюючи отримане значення з питомим опором [міді](#) — $\rho_{\text{Cu}} = 1.5 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$, видно, що питомий опір надпровідника на 17

порядків менший, тому можна вважати, що опір надпровідника дорівнює 0. Якщо в замкнутому контурі, що знаходиться в надпровідному стані створити електричний струм, то він буде протікати тижні й навіть роки, не зменшуючись.

Критичні температури T_c деяких надпровідних матеріалів

Речовина	T_c , К	T_c , °С
<u>Вольфрам</u> ^[2]	0,012	–273,139
<u>Галій</u> ^[2]	1,091	–272,059
<u>Алюміній</u>	1,14	–272,01
<u>Індій</u>	3,37	–269,78
<u>Ртуть</u> ^[2]	4,153	–268,997
<u>Тантал</u> ^[2]	4,483	–268,667
<u>Ванадій</u>	5,3	–267,85
<u>Свинець</u> ^[2]	7,193	–265,957
<u>Ніобій</u> ^[2]	9,5	–263,65
AuPb	7,0	–266,15
<u>Технецій</u>	11,2	–266,07
MoN	12,0	–261,15
<u>PbMo₆S₈</u>	15	–258,15
K ₃ C ₆₀	19	–254,15
Nb ₃ Ge	23	–250,15
La ₂ CuO ₄	35	–238,15
<u>MgB₂</u>	39	–234,15
Cs ₃ C ₆₀	40	–233,15
<u>YBa₂Cu₃O_{7-x}</u> ; x ~ 0,2 ^[3]	93	–180,15

$\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{8+x}$ ^[3]	133	−140,15
H_2S ^[4]	203	−70, 15



Поведінка теплоємності (синя крива) та опору (зелена крива) при переході до надпровідного стану

Подальший розвиток

Після відкриття Камерлінг-Оннеса надпровідність було встановлено в інших матеріалах та сплавах. Важливим наріжним каменем в дослідженні властивостей надпровідників було відкриття ідеального [діамагнетизму](#) надпровідників (або виштовхування зовнішнього магнітного поля з надпровідника), відомого як [ефект Мейснера — Оксенфельда](#) в 1933 році. В 1935 році брати [Фріц](#) та [Хайнц Лондони](#) запропонували першу теорію надпровідності, яка хоча й була повністю [феноменологічною](#), проте пояснювала [ефект Мейснера — Оксенфельда](#). Наступним кроком була запропонована в 1950 році [Віталієм Лазаровичем Гінзбургом](#) та [Львом Давидовичем Ландау](#) нова феноменологічна [теорія](#), яка вперше враховувала квантовомеханічну природу явища. В межах цієї теорії [Олексієм Абрикосовим](#) в 1957 році було передбачено існування [надпровідників II роду](#). В тому ж році [Джон Бардін](#), [Леон Купер](#) та [Джон Роберт Шріффер](#) опублікували роботу, в якій дали мікроскопічне пояснення явища надпровідності, яке одержало назву [теорії Бардіна — Купера — Шриффера](#).

Властивості надпровідників

Надпровідність характеризується абсолютним [діамагнетизмом](#). У [магнітному полі](#) в надпровідному матеріалі виникають такі струми, магнітне поле яких повністю компенсує зовнішнє магнітне поле, тобто магнітне поле виштовхується із надпровідника. Завдяки цій властивості виникає явище [левітації](#) надпровідника над магнітом (або магніту над поверхнею

надпровідника), яке отримало назву *труна Магомета*. Сильне магнітне поле руйнує надпровідність. Проте надпровідники розрізняються за своєю поведінкою у відносно сильних магнітних полях, у залежності від поверхневої енергії границі розділу надпровідної й нормальної фаз. У **надпровідників I роду** ця поверхнева енергія додатня, й надпровідність руйнується, якщо поле перевищує певний рівень, який називається **критичним магнітним полем**. У **надпровідників II роду** поверхнева енергія границі розділу нормальної та надпровідної фаз від'ємна, тож магнітне поле, коли його напруженість перевищує певне значення (воно називається **першим критичним полем**), починає проникати в надпровідник поступово в певних місцях, навколо яких утворюються вихрові струми (див. [Абрикосівський вихор](#)). Якщо збільшувати магнітне поле далі, то нормальних областей стає дедалі більше, й при критичному полі надпровідність руйнується повністю. Надпровідники другого роду використовуються для створення надпровідних [електромагнітів](#).

Теорії надпровідності

Явище надпровідності — макроскопічне (видиме) проявлення квантової природи речовини: [атомів](#) та [електронів](#). Відомо, що електрони в атомі можуть перебувати тільки у визначених станах, яким відповідають [дискретні](#) значення енергії. Таким чином атом може поглинати і випромінювати енергію певними порціями — [квантами](#). Однак, якщо ми перейдемо до макроскопічного тіла, де [концентрація](#) електронів перевищує 10^{22} см^{-3} , то квантовий характер зміни енергії кожного електрону «змазується» великою кількістю таких електронів, що поглинають або випромінюють енергію, і ми бачимо суцільний спектр поглинання або випромінювання енергії макроскопічними тілами.

Лекція № 12

Тема: Магнітне поле. Магнітна індукція. Сила Ампера. Закон Біо-Савара-Лапласа і його застосування для розрахунку магнітного поля. Взаємодія паралельних струмів. Контур зі струмом в магнітному полі. Дія магнітного поля на рухомий заряд. Сила Лоренца та її застосування в прискорювачах заряджених частинок

Мета: Дати характеристику магнітного поля і його властивостей; ознайомити з силовою характеристикою магнітного поля – індукцією; дати поняття сили Ампера, сили Лоренца, навчити розв'язувати задачі з теми «Електромагнетизм».

Обладнання: прилад для демонстрації дії магнітного поля на провідник зі струмом.

Хід заняття.

I. Організаційний момент.

- а) готовність групи до заняття;
- б) психоемоційний настрій;
- в) перевірка присутніх.

II. Актуалізація опорних знань студентів.

Дати відповіді на питання:

1. Що таке електричне поле?
2. Як взаємодіють електричні заряди та за яким законом визначається величина цієї взаємодії?
3. Що таке напруженість електричного поля?
4. Які способи визначення і дослідження електричного поля?

III. Виклад нового матеріалу.

План

1. Магнітне поле. Магнітна індукція. Силкові лінії магнітного поля.
2. Закон Ампера.
3. Закон Біо-Савара-Лапласа і його застосування для розрахунку магнітного поля прямолінійного провідника зі струмом та магнітного поля колового струму.
4. Взаємодія провідників зі струмом.
5. Контур зі струмом в магнітному полі.
6. Дія магнітного поля на рухомий заряд.
7. Сила Лоренца.
8. Рух заряджених частинок в магнітному полі. Прискорювачі заряджених частинок

IV. Узагальнення та систематизація знань.

Розв'язати задачі №№ 3.289; 3.293 із збірника задач за ред. І.П.Гаркуші

V. Підведення підсумків заняття.

VI. Домашнє завдання: вивчити матеріал лекції; за підручником «Загальний курс фізики» т.2 за ред. Кучерука І.М. опрацювати матеріал на с.262 – 274; 281 – 290; 297 - 300 або за підручником «Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф. - с.360 -370; 372 - 376 виконати ІДЗ №3.

№3.289

Електрон, на який діє прискорювальна різниця потенціалів $U = 3,5$ кВ, влітає в однорідне магнітне поле, індукція якого $B = 0,01$ Тл, перпендикулярно до ліній магнітної індукції й рухається по колу радіуса $R = 2$ см. Обчислити відношення заряду електрона до його маси.

Відп. $e/m = 2 U / (R^2 B^2) = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг

№ 3.293

Електрон рухається в однорідному магнітному полі, індукція якого $B = 4$ мТл. Визначити період T обертання електрона.

Відп. $T = 8,9$ нс.

Лекція № 11

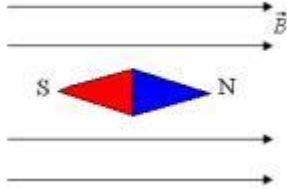
Магнітне поле. Магнітна індукція. Сила Ампера. Закон Біо-Савара-Лапласа і його застосування для розрахунку магнітного поля. Взаємодія паралельних струмів. Контур зі струмом в магнітному полі. Дія магнітного поля на рухомий заряд. Сила Лоренца та її застосування в прискорювачах заряджених частинок

Магнітне поле. Сила Ампера. Сила Лоренца

Магнетне поле – це особлива форма матеріальної взаємодії. Воно виникає : 1) між рухомими зарядженими частинками, 2) між провідниками зі струмом, 3) між струмом і рухомим зарядом. Магнетне поле – одна з форм електромагнетного поля. Завжди, коли існує змінне електричне поле, виникає й магнетне поле. Магнетне поле, характеристики якого не змінюються з часом, називається стаціонарним. Силовою характеристикою магнетного поля є вектор індукції магнетного поля $\vec{B}$. За напрям вектора магнетної індукції в місці розташування вільної

маленької рамки зі струмом беруть напрям перпендикуляра до рамки. Останній визначають напрямом руху свердлика (правого гвинта), який потрібно обертати в напрямі струму в рамці.

Правило свердлика: якщо рукоятку свердлика з правою різьбою обертати за напрямком струму в рамці, то напрям вектора $\vec{n}$ збігається з напрямком руху свердлика. Напрямок вектора магнетної індукції $\vec{B}$ збігається з напрямком осі магнетної стрілки в полі (від південного полюса до північного) (Рис. 42).

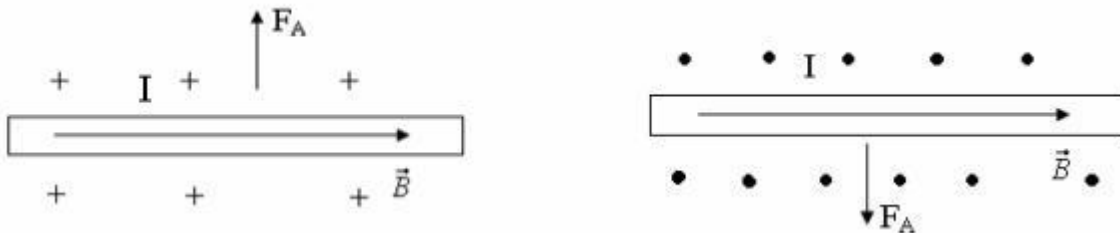


Графічно магнітне поле зображають лініями магнетної індукції, дотичні до яких збігаються з напрямом вектора магнетної індукції в даній точці. Лінії магнетної індукції завжди замкнуті на відміну від ліній електростатичного поля, які починаються і закінчуються на зарядах. Такі поля називають вихровими.

На прямолінійний провідник зі струмом в магнетному полі діє сила, перпендикулярна до напрямку струму і вектора магнетної індукції (сила Ампера)

$$F_A = BIl \sin \alpha$$

B – індукція поля, I – сила струму в провіднику, l – довжина провідника, α – кут між провідником і напрямом вектора магнетної індукції. Напрямок сили Ампера визначають за правилом лівої руки: якщо розташувати ліву руку так, щоб силові лінії магнетного поля входили в долоню, а чотири випрямлені пальці вказували напрямку струму, то відігнутий на 90° великий палець покаже напрям сили Ампера (Рис.43).



Провідники зі струмом одного напрямку притягаються, різного напрямку відштовхуються. Сили взаємодії двох провідників із струмом визначається за формулою

$$F = \mu \mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{2\pi d}$$

де l – довжина провідника, $I_1 I_2$ – відповідні струми, d – відстань між провідниками, $\mu_0 =$

$4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, μ_0 – магнетна стала, μ – магнетна проникність середовища: $\mu = \frac{B}{B_0}$ - показує в скільки разів вектор магнетної індукції в однорідному середовищі більший за вектор магнетної індукції у вакуумі. На заряджену частинку у магнетному полі, яка рухається зі швидкістю $\vec{v}$, діє сила Лоренца

$$F_L = qvB \sin \alpha$$

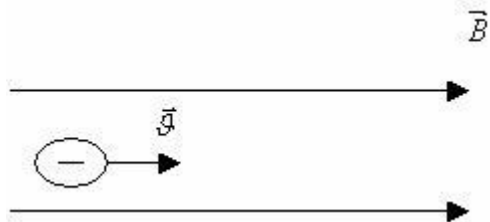
де q – заряд частинки, v – швидкість частинки, α – кут між вектором швидкості і вектором магнетної індукції.

Напрямок сили Лоренца визначається за правилом лівої руки, яке справджується для руху позитивних заряджених частинок. Для негативних – напрямок струму вважається протилежним напрямку їх руху.

Сила Лоренца завжди перпендикулярна до швидкості частинки, тому вона не виконує роботи.

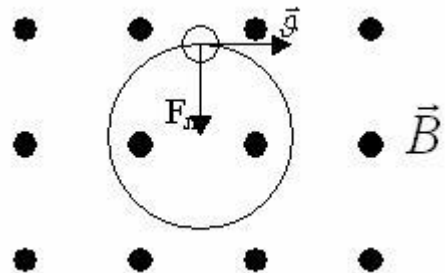
Якщо частинка влітає в електричне поле під кутом ?:

1. $\alpha = 0$



В цьому випадку частинка рухається по інерції ($v = \text{const}$) (Рис.4).

2. $\alpha = 90^\circ$



$B = \text{const}$, то частинка описує коло (Рис.45).

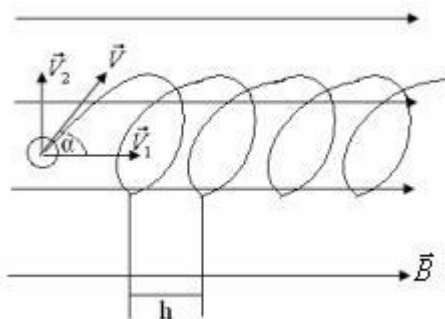
$$F_L = \frac{m v^2}{R} = q v B$$

$$R = \frac{m v}{q B}$$

Період обертання зарядженої частинки

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{q B}$$

3. $\alpha < 90^\circ$



Швидкість частинки напрямлена під кутом α до магнетного поля. Під дією сили Лоренца частинка рухається по гвинтовій лінії (Рис.46).

h – крок спіралі.

$h = v_1 T$, де T – період обертання.

Електричне поле діє як на рухомі, так і на нерухомі електричні заряди. Магнітне поле діє лише на рухомі в цьому полі електричні заряди.

Щоб охарактеризувати магнітне поле, треба розглянути його дію на певний струм. Розглянемо замкнений плоский контур зі струмом, розміри якого малі порівняно з відстанню до струмів, що утворюють поле. За позитивний напрямок нормалі приймається напрямок поступального руху свердлика, головка якого обертається в напрямку струму, що тече в контурі (рис. 159).

Контур зі струмом характеризується **магнітним моментом** $\vec{p}_m$, який дорівнює добутку сили струму I , що протікає у контурі, на площу поверхні контуру S :

$$\vec{p}_m = I S \vec{n},$$

де $\vec{n}$ одиничний вектор нормалі до поверхні рамки. Напрямок вектора $\vec{p}_m$ збігається з напрямком позитивної нормалі рамки.

Контур зі струмом в магнітному полі повертається, набуваючи рівноважного положення і його позитивна нормаль розміщується вздовж осі стрілки в напрямку від її магнітного полюса (рис. 160).

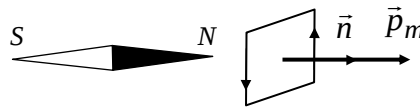


Рис. 160

Контуром зі струмом можна скористатись і для кількісного опису магнітного поля. На контур в магнітному полі діє пара сил. Обертальний момент сил M залежить від властивостей контуру:

$$M \sim p_m.$$

Якщо контур зі струмом повернути на 90° від рівноважного положення, то на нього буде діяти максимальний обертальний момент $M_{\max}$.

Якщо в дане місце магнітного поля поміщати контури з різними магнітними моментами, то на них діятимуть різні обертальні моменти, але відношення $M_{\max}/p_m$ для всіх контурів однакове і служить кількісною характеристикою магнітного поля:

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}.$$

Магнітна індукція $\vec{B}$ в даному місці магнітного поля визначається максимальним обертальним моментом, що діє на контур з одиничним магнітним моментом.

Одиниця магнітної індукції – тесла: 1 Тл – магнітна індукція такого магнітного поля, в

якому на рамку з магнітним моментом $1 \text{ А} \cdot \text{м}^2$ діє максимальний момент сили $1 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

За напрямком магнітної індукції $\vec{B}$ приймається напрямком магнітного моменту контуру p_m , який знаходиться в рівноважному положенні у цьому полі.

Для графічного зображення магнітних полів зручно користуватись лініями магнітної індукції.

Лініями магнітної індукції називають такі лінії, дотичні до яких в кожній точці збігаються з напрямком вектора $\vec{B}$ в цих точках поля.

Напрямок ліній індукції магнітного поля струму визначається за правилом свердлика: якщо вкручувати свердлик за напрямком руху струму в провіднику, то напрямок руху його рукоятки покаже напрям ліній магнітної індукції.

Закон Біо–Савара-Лапласа. Теорема про циркуляцію .

Магнітне поле постійних струмів різної конфігурації вивчалось експериментально французькими ученими **Ж. Біо** і **Ф. Саваром**(1820 р.). Пізніше ці дослідження були узагальнені Лапласом. Вони прийшли до висновку, що індукція магнітного поля струмів, що протікають по провіднику, визначається спільною дією всіх окремих ділянок провідника. Магнітне поле підкоряється **принципу суперпозиції**:

Якщо магнітне поле створюється декількома провідниками із струмом, то індукція результуючого поля є векторною сумою індукцій полів, що створюються кожним провідником окремо.

$\vec{B}$
Індукцію $\Delta \vec{B}$ провідника із струмом можна представити як векторну суму елементарних

індукцій $\Delta \vec{B}$, що створюються окремими ділянками провідника. На досліді неможливо отримати окрему ділянку провідника із струмом, оскільки постійні струми завжди замкнуті. Можна виміряти тільки сумарну індукцію магнітного поля, що

$\Delta \vec{B}$
створюється всіма елементами струму. **Закон Біо–Савара** визначає внесок $\Delta \vec{B}$ у магнітну

індукцію $\vec{B}$ результуючого магнітного поля, що створюється малою ділянкою Δl провідника із струмом I .

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I \Delta l \sin \alpha}{4\pi r^2}.$$

Тут r – відстань від даної ділянки Δl до точки спостереження,

α – кут між напрямом на точку спостереження і напрямом струму на даній ділянці

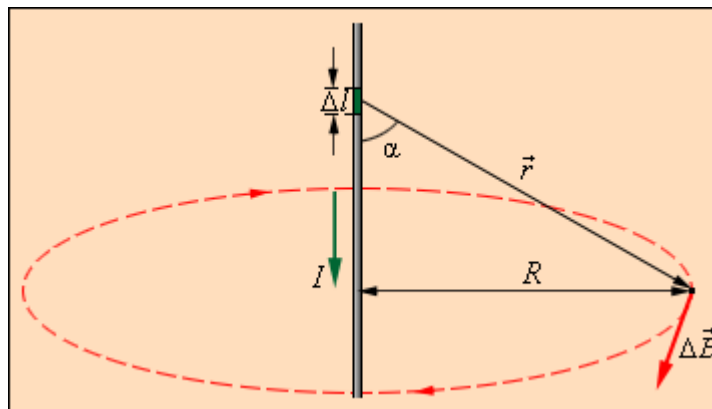
μ_0 – магнітна стала.

$$\Delta \vec{B}$$

Напрям вектора $\Delta \vec{B}$ визначається правилом правого гвинта: він збігається з напрямом обертання рукоятки свердлика при його поступальному переміщенні уздовж струму.

Мал. 1 ілюструє закон Біо–Савара на прикладі магнітного поля прямолінійного провідника із струмом. Якщо просумувати (проінтегрувати) внески в магнітне поле всіх окремих ділянок прямолінійного провідника із струмом, то вийде вже відома з попереднього уроку формула для магнітної індукції поля прямого струму:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R},$$



Малюнок 1.

Ілюстрація закону Біо-Савара-Лапласа

Закон Біо-Савара-Лапласа дозволяє розраховувати магнітні поля струмів різних конфігурацій. Неважко, наприклад, виконати розрахунок магнітного поля в центрі кругового витка із струмом. Цей розрахунок приводить до формули

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 R},$$

де R – радіус кругового провідника.

$\vec{B}$

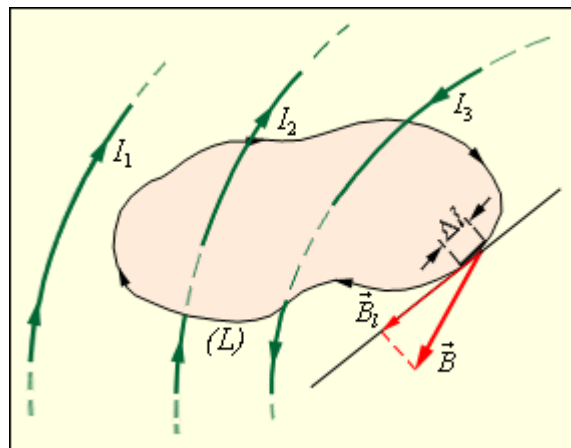
Для визначення напрямку вектора $\vec{B}$ також можна використовувати **правило правого гвинта**, тільки тепер його рукоятку потрібно обертати у напрямі кругового струму, а поступальне переміщення свердлика вкаже напрям вектора магнітної індукції.

Розрахунки магнітного поля струмів часто спрощуються при врахуванні симетрії в конфігурації струмів, що створюють поле. В цьому випадку розрахунки можна виконувати з допомогою теореми про циркуляцію вектора магнітної індукції яка в теорії магнітного поля струмів грає ту ж роль, що і теорема Гауса у електростатиці.

$\vec{B}$.

Пояснимо поняття циркуляції вектора $\vec{B}$. Хай в просторі, де створено магнітне поле, вибраний деякий умовний замкнутий контур (не обов'язково плоский) і вказаний позитивний напрям обходу контура. На кожній окремій малій ділянці Δl цього контура можна визначити дотичну

складову B_t вектора $\vec{B}$ у даному місці, тобто визначити проекцію вектора $\vec{B}$ на напрям дотичній до даної ділянки контура (мал. .2).



Малюнок 2.

Замкнутий контур (L) із заданим напрямом обходу.

Зображено струми I_1, I_2 і I_3 що створюють магнітне поле.

$\vec{B}$

$\vec{B}$

Циркуляцією вектора $\vec{B}$ називають суму добутків $B_l \Delta l$ узятую по всьому контуру L : Деякі струми, що створюють магнітне поле, можуть пронизувати вибраний контур L в той час, як інші струми можуть знаходитися в стороні від контура.

Теорема про циркуляцію стверджує, що циркуляція вектора індукції магнітного поля постійних струмів по будь-якому контуру L завжди дорівнює добутку магнітної сталої μ_0 на суму всіх струмів, що пронизують контур

$$\sum_{(L)} B_l \Delta l = \mu_0 \sum I_i$$

Як приклад, на мал. 2 зображено декілька провідників із струмами, що створюють магнітне поле. Струми I_2 і I_3 пронизують контур L у протилежних напрямках, їм мають бути приписані різні знаки – за позитивних вважаються струми, які пов'язані з вибраним напрямом обходу контура правилом правого гвинта (свердлика).

Отже $I_3 > 0$, а $I_2 < 0$. Струм I_1 не пронизує контур L .

Теорема про циркуляцію в даному прикладі виражається співвідношенням:

$$\sum_{(L)} B_l \Delta l = \mu_0 (I_3 - I_2).$$

Теорема про циркуляцію в загальному вигляді витікає із закону Біо-Савара-Лапласа і принципу суперпозиції.

Простим прикладом застосування теореми про циркуляцію є визначення магнітної індукції поля прямолінійного провідника із струмом. Враховуючи симетрію в даній задачі, контур L доцільно вибрати у вигляді кола деякого радіуса R , яке лежить в перпендикулярній до провідника площині. Центр кола знаходиться в деякій точці провідника. Через симетрію

$\vec{B}$

вектор $\vec{B}$ направлений по дотичній ($B_l = B$), а його модуль однаковий в усіх точках кола. Застосування теореми про циркуляцію приводить до співвідношення:

$$\sum_{(L)} B_i \Delta l = 2\pi R B = \mu_0 I,$$

звідки слідує формула для модуля магнітної індукції поля прямолінійного провідника із струмом, приведена раніше.

Цей приклад показує, що теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції $\vec{B}$ може бути використана для розрахунку магнітних полів, що створюються симетричним розподілом струмів, коли з міркувань симетрії можна «вгадати» загальну структуру поля.

ЗАКОН ВЗАЄМОДІЇ ПАРАЛЕЛЬНИХ СТРУМІВ

Принцип суперпозиції магнітних полів.

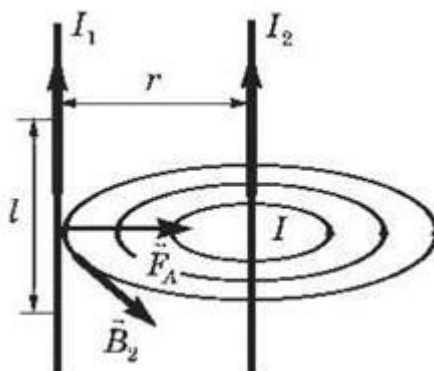
Магнітні поля не взаємодіють, а тільки накладаються:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n.$$

Струми взаємодіють, оскільки магнітне поле одного струму діє на інший струм і навпаки.

Взаємодія паралельних струмів нескінченної довжини (рис. 73):

$$F_{\parallel} = \mu\mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{2\pi r}.$$



Магнітне поле другого струму

$$B_2 = \mu\mu_0 \frac{I_2}{2\pi r}$$

діє на перший струм із силою Ампера

$$F_1 = B_2 I_1 l ,$$

і навпаки.

Сила Ампера на одиницю довжини провідника:

$$\frac{F_1}{L} = \mu\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r} .$$

Провідники, по яких паралельні струми йдуть в одному напрямі, притягуються, якщо в протилежному — відштовхуються.

Лекція № 13

Тема: Напруженість магнітного поля. Закон повного струму для магнітного поля у вакуумі. Вихровий характер магнітного поля. Застосування закону повного струму для розрахунку магнітних полів тороїда і довгого соленоїда. Магнітний потік. Теорема Остроградського-Гаусса для магнітного поля. Робота переміщення провідника зі струмом в магнітному полі.

Магнітні моменти електронів і атомів. Вектор намагнічення. Діа-, пара- і феромагнетизм. Доменна структура феромагнетиків. Температура Кюрі. Ферити.

Мета: Розкрити природу діа-, пара- і феромагнетизму, ввести поняття магнітного моменту атомів, доменів, фізичний зміст температури Кюрі.

Вивчити поняття намагніченості; навчитись характеризувати речовини за їх магнітними властивостями

Обладнання: феромагнітні матеріали

Хід заняття.

I. Організаційний момент.

- а) готовність групи до заняття;
- б) психоемоційний настрій;
- в) перевірка присутніх.

II. Актуалізація опорних знань студентів.

Дати відповіді на питання:

- 1.Що таке магнітний момент?
- 2.Що ви знаєте про рух електронів в атомах?

III. Виклад нового матеріалу.

План

- 1. Виникнення мікрострумів
- 2. Орбітальний та спіновий магнітні моменти електронів. Магнітні моменти атомів.
- 3. Поділ речовин на діа-, пара- і феромагнетики
- 4. Доменна структура феромагнетиків.
- 5. Температура Кюрі.
- 6. Атом у зовнішньому магнітному полі.
- 7. Вектор намагніченості. Поняття магнітної сприйнятливості речовини та її зв'язок з відносною магнітною проникністю середовища.
- 8. Діамагнетики та парамагнетики у зовнішньому магнітному полі.
- 9. Процес намагнічення феромагнетиків.

10. Магнітний гістерезис. М'які і жорсткі феромагнетики. Ферити.

11. Використання феромагнетиків. Принципи записування і зчитування інформації на магнітних носіях.

IV. Узагальнення та систематизація знань.

Розв'язати задачу № 3.370 із збірника задач за ред. І.П.Гаркуші

V. Підведення підсумків заняття.

VI. Домашнє завдання: вивчити матеріал лекції; за підручником «Загальний курс фізики», т.2, за ред. Кучерука І.М. опрацювати матеріал на с.307 – 311; 316-317; 324 -331; 336-339 або за підручником «Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф. - с.379 – 381.

Лекція № 13

Напруженість магнітного поля. Закон повного струму для магнітного поля у вакуумі. Вихровий характер магнітного поля. Застосування закону повного струму для розрахунку магнітних полів тороїда і довгого соленоїда. Магнітний потік. Теорема Остроградського-Гаусса для магнітного поля. Робота переміщення провідника зі струмом в магнітному полі.

Магнітні моменти електронів і атомів. Вектор намагнічення. Діа-, пара- і феромагнетизм. Доменна структура феромагнетиків. Температура Кюрі. Ферити.

Із закону Ампера можна встановити зміст та одиницю магнітної індукції. Якщо $d\vec{l} \perp \vec{B}$, то $B = \frac{dF}{Idl} = \frac{q dE}{Idl}$. Отже, магнітна індукція вимірюється силою, з якою магнітне поле діє на одиницю довжини провідника, яким проходить електричний струм в

1 А і який розміщений перпендикулярно до ліній індукції магнітного поля: $[B]=[1 \text{ Н}/(\text{А}\cdot\text{м})]=[1 (\text{Кл}\cdot\text{В})/(\text{А}\cdot\text{м}^2)]=[1 (\text{В}\cdot\text{с})/\text{м}^2]=[1 \text{ Вб}/\text{м}^2]=[1 \text{ Тл}]$.

Іншою характеристикою магнітного поля є *напруженість магнітного поля* $\vec{H}$ – це векторна величина, яка не залежить від магнітних властивостей середовища і характеризує магнітне поле в кожній точці за пов’язаним із ним струмом та положенням точки. Якщо середовище однорідне і ізотропне, то ці умови задовольняє

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu}$$

відношення $\mu_0 \mu$, де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н}/\text{А}^2$ – магнітна стала; μ – відносна магнітна проникність середовища.

Одиницею вимірювання напруженості магнітного поля є $[H]=[1 (\text{В}\cdot\text{с})/\text{м}^2 : 1 \text{ Н}/\text{А}^2]=[1 (\text{Дж}\cdot\text{А})/(\text{Дж}\cdot\text{м})]=[1 \text{ А}/\text{м}]$

Якщо лінії магнітної індукції пронизують деяку невелику площину dS таку, що в її межах магнітне поле можна вважати однорідним. Тоді, під потоком вектора магнітної індукції, або магнітним потоком, розуміють скалярну фізичну величину $d\Phi = B \cdot dS \cos(\vec{B}, \vec{n}) = B_n \cdot dS$, де B_n – проекція вектора $\vec{B}$ на напрямок нормалі.

$$\Phi = \int_S d\Phi = \int_S B_n \cdot dS$$

Повний потік через поверхню S буде: . Якщо магнітне поле однорідне, а поверхня плоска і перпендикулярна до $\vec{B}$, то $B_n = B = \text{const} \Rightarrow \Phi = B \cdot S$.

Напруженість магнітного поля H :

$$H = B/\mu_a$$

тут B – вектор магнітної індукції

μ_a – абсолютна магнітна проникність середовища.

Напруженість магнітного поля H є вектором. Вектор напруженості магнітного поля спрямований по дотичній до силової лінії магнітного поля в даній точці. Цей напрям збігається з напрямом вектора магнітної індукції.

Напруженість магнітного поля вимірюється в амперах на метр: А/м.

Закон повного струму.

Вихровий характер магнітного поля

Циркуляцією вектора $\vec{B}$ (або $\vec{H}$) по замкненому контуру називається інтеграл по замкненому контуру L скалярного добутку векторів $\vec{B}$ (або $\vec{H}$) і $d\vec{\ell}$, де $d\vec{\ell}$ - вектор елементарної довжини контуру.

$$\oint_L \vec{B} d\vec{\ell} = \oint_L B_L d\ell = \oint_L B d\ell_B,$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = \oint_L H_L d\ell = \oint_L H d\ell_H,$$

де B_L - проекція вектора $\vec{B}$ на вектор $d\vec{\ell}$.

$$(\vec{d\ell}, \vec{H}) = \alpha;$$

$$\vec{H} d\vec{\ell} = H d\ell \cos \alpha = H_L d\ell = H d\ell_H;$$

$$\begin{aligned} \oint_L H_L d\ell &= \oint_L H d\ell_H = \\ \int_0^{2\pi} H R d\alpha &= \int_0^{2\pi} \frac{J}{2\pi R} R d\alpha = \frac{J}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha = J \end{aligned}$$

.

Закон повного струму:

Циркуляція вектора

$\vec{H}$ по довільному замкненому контуру дорівнює сумі струмів, охоплених цим контуром

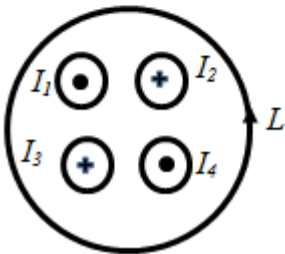
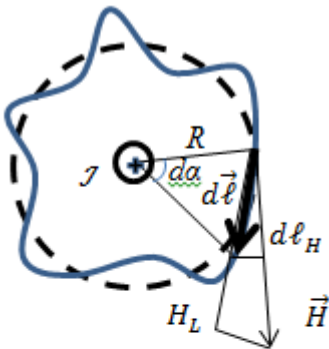
$$\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = \sum_{k=1}^N J_k;$$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_{k=1}^N J_k.$$

Позитивними вважаються ті струми, напрямки яких з напрямком обходу підкоряється правилу правої руки. Струми, напрямки яких протилежний напрямку обходу, беруться зі знаком мінус.

$$\oint_L \vec{H} d\vec{\ell} = J_1 - J_2 + J_3 - J_4.$$

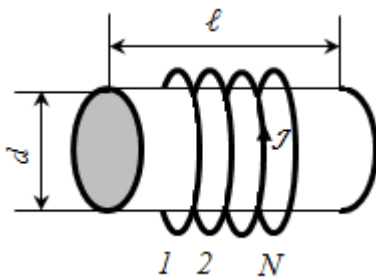
2. На відміну від електростатичного поля, для якого циркуляція вектора $\vec{E}$ дорівнює нулю $\oint_L \vec{E} d\vec{\ell} = 0$ і електростатичне поле є



потенційним, циркуляція магнітного поля не дорівнює нулю $\oint_L \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k$,

якщо контур, по якому ми розглядаємо циркуляцію, охоплює струми. Поле, циркуляція якого відмінна від нуля, називається **вихровим** або **соленоїдальним**. Отже, магнітне поле є вихровим. У вихрового поля силові лінії замкнені, отже, магнітних зарядів не існує.

Магнітне поле соленоїда й тороида



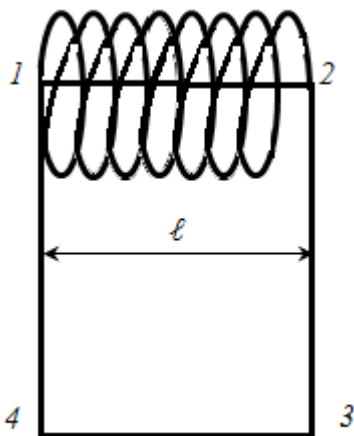
Соленоїд представляє циліндричний каркас, на який намотані витки дроту. Розглянемо нескінченно довгий соленоїд, тобто соленоїд у якого $l \gg d$, де l - довжина, d – діаметр соленоїда. Усередині такого соленоїда магнітне поле однорідне. **Однорідним** називається поле, силові лінії якого паралельні й густота їх постійна.

Застосуємо закон повного струму для обчислення напруженості магнітного поля соленоїда. Представимо контур L , по якому розглядається циркуляція вектора $\vec{H}$,

що полягають із чотирьох зв'язаних ділянок 1-2; 2-3; 3-4; 4-1. Тоді циркуляція вектора $\vec{H}$ по обраному нами контуру L буде рівна

$$\oint_L H_L d\ell = \int_1^2 H_L d\ell + \int_2^3 H_L d\ell + \int_3^4 H_L d\ell + \int_4^1 H_L d\ell.$$

$$\int_1^2 H_L d\ell = H\ell;$$



$$\int_2^3 H_L d\ell = 0, \text{ так як } \vec{H} \perp d\vec{\ell}, \text{ отже, } H_{L\ 2-3} = 0,$$

$$\int_3^4 H_L d\ell = 0, \text{ так ми вибрали ділянку 3-4 досить далеко від соленоїда й можна вважати, що поле вдалині від соленоїда дорівнює нулю,}$$

$$\int_4^1 H_L d\ell = 0, \text{ так як } \vec{H} \perp d\vec{\ell}$$

і, отже

$$H_{L\ 4-1} = 0.$$

Контур L охоплює N струмів, де N – число витків соленоїда, тоді за законом повного струму

$$H\ell = N\mathcal{I};$$

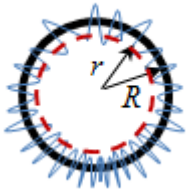
$$H = \frac{N}{\ell}\mathcal{I} = n\mathcal{I}$$

магнітне поле нескінченне довгого соленоїда

n – щільність намотування – число витків на одиницю довжини

$$n = \frac{N}{\ell}.$$

Напруженість поля усередині соленоїда дорівнює числу витків, що доводяться на одиницю довжини соленоїда, помноженому на силу струму.



Тороид – тор, з намотаними на нього витками дроту. На відміну від соленоїда, у якого магнітне поле є як усередині, так і зовні, у тороида магнітне поле повністю зосереджене усередині витків, тобто немає розсіювання енергії магнітного поля.

$$\oint_L H_L d\ell = H 2\pi r = N\mathcal{I} \Rightarrow H = \frac{N\mathcal{I}}{2\pi r} = \frac{2\pi R n \mathcal{I}}{2\pi r} = n\mathcal{I} \frac{R}{r},$$

где $N = n 2\pi R$.

$H = n\mathcal{I} \frac{R}{r}$ – магнітне поле тороида.

Якщо $R \gg R_{\text{витка}}$, то $R \approx r$ і $H = n\mathcal{I}$.

Магнітний потік — потік вектора магнітної індукції.

Магнітний потік позначається зазвичай грецькою літерою Φ , вимірюється у системі СІ у веберах, у системі СГСМ одиницею вимірювання магнітного потоку є максвел: магнітний потік поля величиною 1 гаус через сантиметр квадратний площі.

Магнітний потік через нескінченно маленьку площадку dS визначається як

$$d\Phi = B dS \cos \theta,$$

де B — значення індукції магнітного поля, θ — кут між напрямком поля й нормаллю до поверхні. У векторній формі

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Магнітний потік псевдоскалярна величина.

Зазвичай магнітний потік обраховується через поверхню, обмежену певним контуром, наприклад, контуром, який утворюють провідники зі струмом. Оскільки в різних точках поверхні магнітна індукція різна, то проводиться інтегрування

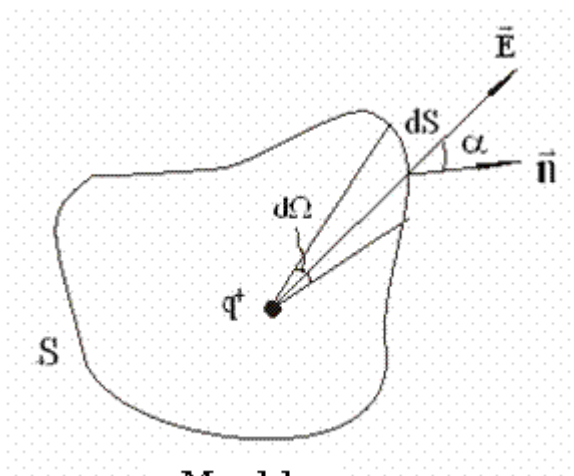
$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Теорема Остроградського-Гауса. Застосування теореми Остроградського-Гауса.

1. Теорема Остроградського-Гауса в інтегральній формі.
2. Теорема Остроградського-Гауса в диференціальній формі.
3. Застосування теорема Остроградського-Гауса для розрахунку найпростіших електричних полів у вакуумі: поля нескінченної площини, двох паралельних площин, сфери, кулі, циліндра.

1. Теорема Остроградського-Гауса в інтегральній формі.

Теорема Остроградського-Гауса значно спрощує розрахунки електричних полів, створених зарядженими тілами чи системою тіл, яка володіє просторовою симетрією розподілу заряду.



Мал.1.1.

Розглянемо деяку замкнену поверхню S , всередині об'єму, що обмежується поверхню. Розмістимо точковий додатний заряд q^+ (мал.1.1.). Розрахуємо в загальному випадку потік ліній напруженості електричного поля, що

створюється зарядом q^+ , через поверхню S . З попередньої теми відомо, що в найбільш загальному випадку потік ліній напруженості визначається за формулою:

$$\mathbf{N} = \oint_S \mathbf{E}_n d\mathbf{S} \quad (1.1.).$$

Також відомо, що напруженість електричного поля, створеного точковим зарядом q на відстані r , визначається виразом

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{q}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1.2.)$$

Визначимо потік через елемент площі dS (мал.1.1.)

$$dN = \mathbf{E}_n dS = \mathbf{E} dS \cdot \cos \alpha, \quad (1.3.)$$

де α - кут між зовнішньою нормаллю до dS та вектором напруженості $\vec{E}$ в даній точці. Ввівши заміну $dS' = dS \cdot \cos \alpha$ та підставивши 1.2. в 1.3. отримаємо:

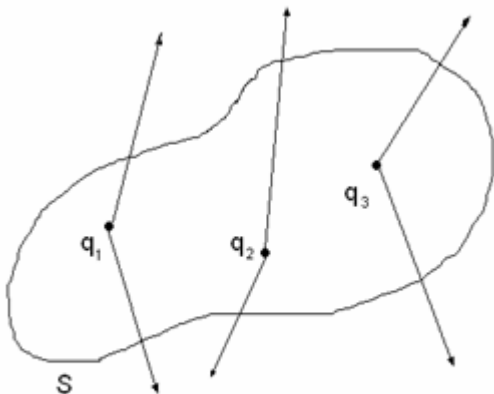
$$dN = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS' \quad (1.4.)$$

З геометрії відомо, що $d\Omega = \frac{dS'}{r^2}$ - тілесний кут.

$$dN = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega, \quad (1.4a.)$$

Для того, щоб визначити потік через поверхню S , проінтегруємо 1.4a. по всьому тілесному куту.

$$N = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega \Big|_0^{4\pi} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (4\pi - 0) = \frac{q}{\epsilon_0},$$



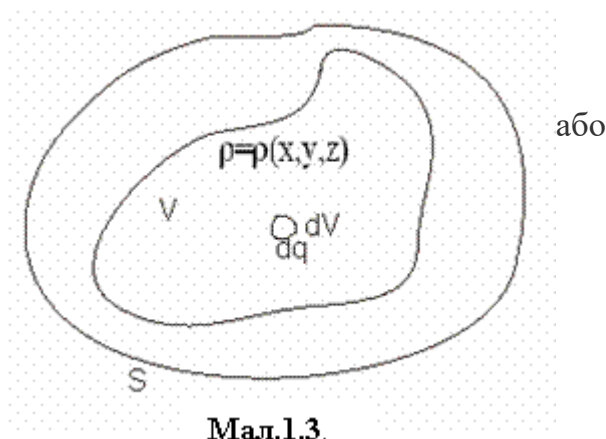
Мал.1.2.

тобто $N = \frac{q}{\epsilon_0}$, або згідно з 1.1.

$$\oint_S \mathbf{E}_n dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.5.)$$

Формула 1.5. називається теоремою Остроградського-Гауса в інтегральній формі для точкового заряду.

Запишемо теорему Остроградського-Гауса для системи точкових зарядів (мал.1.2.) Використовуючи принцип суперпозиції, можна стверджувати, що загальний потік через замкнену поверхню, буде визначатись алгебраїчною сумою потоків, створених кожним окремим зарядом через дану поверхню:



$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \dots + \mathbf{N}_n, \quad (1.6.)$$

$$\mathbf{N} = \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} + \dots + \frac{q_n}{\epsilon_0}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i, \quad (1.8)$$

$$\oint_S \mathbf{E}_n d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i, \quad (1.9)$$

Вираз 1.9. - теорема Остроградського-Гауса для системи точкових зарядів.

Розглянемо неперервний розподіл заряду густиною $\rho = \rho(x, y, z)$, розташований в об'ємі V , та визначимо потік ліній напруженості електричного поля через поверхню S (мал.1.3.),

Потік dN , створений зарядом $dq = \rho dV$ через елемент площі dS , буде

рівний $dN = \frac{1}{\epsilon_0} dq = \frac{1}{\epsilon_0} \rho dV$. Використаємо означення потоку в загальному випадку та проінтегруємо ліву частину останньої рівності по об'єму :

$$\oint_S \mathbf{E}_n d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (1.10)$$

Формула 1.10. – найбільш загальний вираз теореми Остроградського-Гауса в інтегральній формі.

Згідно з наведеними міркуваннями, можна зробити висновок, що потік ліній напруженості електричного поля, через будь яку замкнену поверхню рівний повному заряду, який перебуває в об'ємі, обмеженому даною поверхнею.

Використовуючи формулу для означення індукції електричного поля, теорема Остроградського-Гауса запишеться:

$$\oint_S \mathbf{D}_n d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \quad (1.11.),$$

тобто потік ліній індукції через певну поверхню буде рівний повному заряду, що міститься в об'ємі, обмеженому даною поверхнею. Також з формули 1.11. випливає, що одиницею вимірювання потоку магнітної індукції є Кулон.

Теорема Остроградського-Гауса в диференціальній формі.

Відомо, що математичний вираз теореми Остроградського-Гауса описує зв'язок та перехід між поверхневим подвійним інтегралом та потрійним об'ємним. У загальному випадку, коли маємо векторне поле деякого вектора $\vec{A}$, теорема Остроградського-Гауса запишеться

$$\oint_S \vec{A}_n dS = \int_V \text{div} \vec{A} dV \quad (2.1.)$$

Розглянемо даний вираз для векторного поля на прикладі напруженості електричного поля.

$$\oint_S \vec{E}_n dS = \int_V \text{div} \vec{E} dV \quad (2.2.)$$

Із формули 1.10. та 2.2. отримаємо

$$\int_V \text{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (2.3.)$$

Оскільки ми маємо два інтеграли, інтегрування в яких проводиться по об'єму, і які рівні між собою, то підінтегральні вирази також будуть рівними.

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.4.)$$

Отримане співвідношення виражає теорему Остроградського-Гауса в диференціальній формі.

Використавши означення $\text{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$, 2.4. можна записати, як

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.5.)$$

$$(\vec{\nabla} \vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

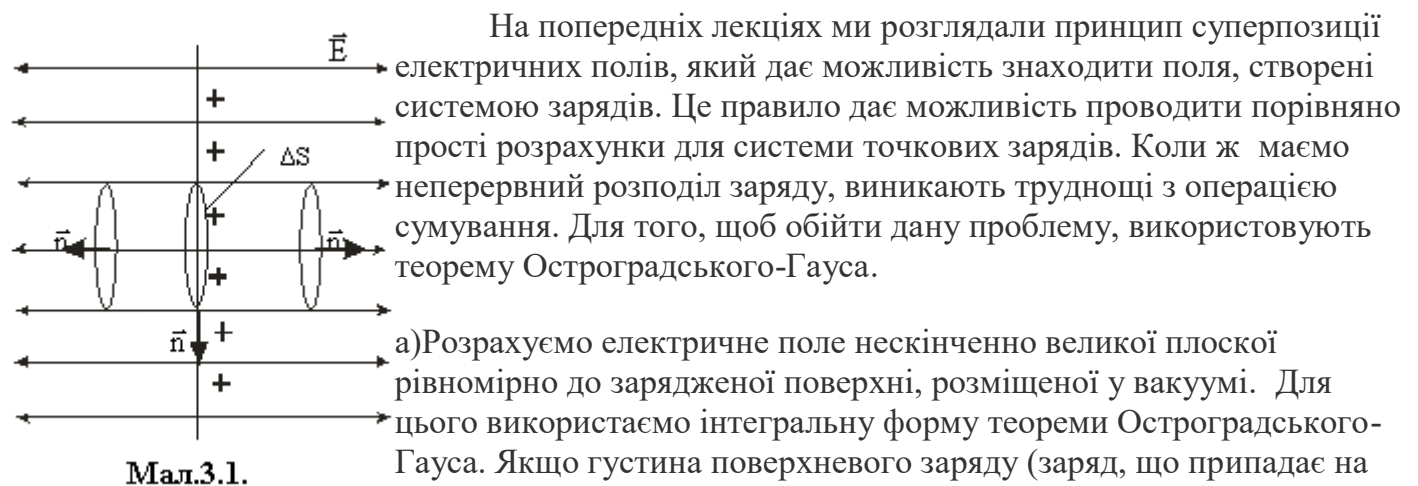
або ϵ_0 , тобто праву частину подати, як скалярний добуток вектора

напруженості $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$, та оператора $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$.

Провівши аналогічні міркування для індукції магнітного поля , отримаємо

$$\text{div} \vec{D} = \rho \quad \text{та} \quad (\vec{\nabla} \vec{D}) = \rho .$$

3.Застосування теореми Остроградського-Гауса для розрахунку найпростіших електричних полів у вакуумі: поля нескінченної площини, двох паралельних площин, сфери, кулі, циліндра.



Визначимо напруженість поля на основі циліндра, який ми вибираємо, як поверхню інтегрування. Площа ΔS , яку обмежує поверхня циліндра буде мати заряд $q = \sigma \Delta S$. З обраних умов інтегрування видно, що потік ліній напруженості електричного поля буде відмінний від нуля лише через основи циліндра, і, згідно з означенням потоку він буде

рівний
$$N = \oint_S \vec{E}_n dS = 2E\Delta S$$
 .

Запишемо теорему Остроградського-Гауса,

$$2E\Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (3.1.),$$

в нашому випадку

$$\int_V \rho dV = q = \sigma \Delta S \quad (3.2.).$$

$$2E\Delta S = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta S, \text{ або}$$

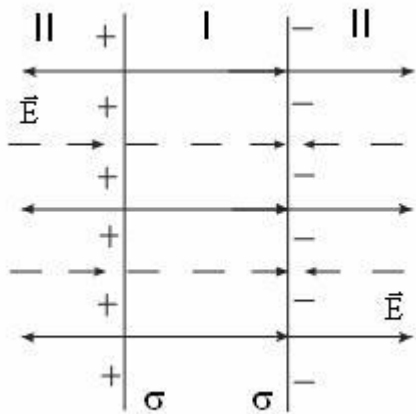
Підставимо 3.2. в 3.1., отримаємо:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (3.3.)$$

З геометричних міркувань та симетрії системи бачимо, що лінії напруженості електричного поля перпендикулярні до зарядженої площини. Напруженість визначатиметься формулою 3.3., в якій немає залежності від координати, тобто напруженість буде однакою на різних відстанях від площини.

Індукція електричного поля створеного площиною визначатиметься формулою $D = \frac{\sigma}{2}$.

б) Розглянемо дві паралельні із зарядами протилежних знаків нескінченні плоскі поверхні (мал.3.2.). Нехай густина поверхневого заряду на додатній від'ємно заряджених площинах за модулем однакові і становить σ . Простір відносно площин можна поділити на три області: одна між площинами (I), де поле від двох різних площин буде напрямлене однакою, та дві області (II), де поля напрямлені в протилежні сторони.



Мал.3.2.

Оскільки, площини мають заряд однаковий за модулем, то в області (II), згідно з принципом суперпозиції, напруженість електричного поля дорівнюватиме нулю $E = 0$.

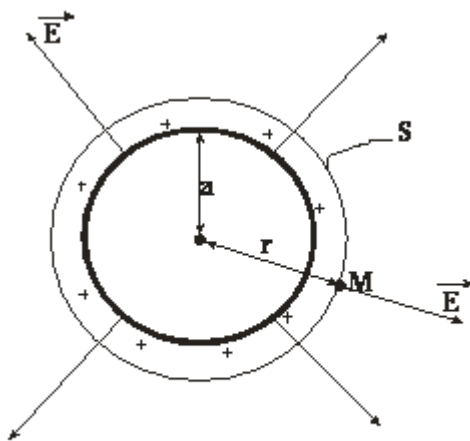
Напруженість створена негативно зарядженою

площиною $E^- = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ та позитивно зарядженою $E^+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, які в (I) полях мають однаковий напрям, тому, згідно з принципом суперпозиції електричних полів, сумарна

$$E = E^- + E^+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

напруженість

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (3.4.)$$



Мал.3.3.

Аналогічні міркування можна провести для індукції електричного поля. В області (II) $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, в (I) $\mathbf{D} = \sigma$. Попередня формула та формула 3.4 описують електричне поле, створене досліджуваною системою. Також, потрібно звернути увагу на те, що поле існуватиме лише між площинами.

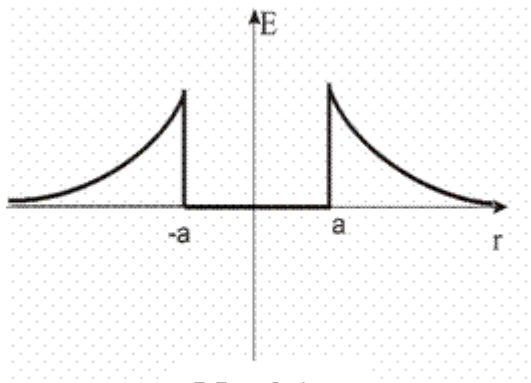
в) Поле рівномірно зарядженої сферичної поверхні радіусу a (мал.3.3.). Будемо вважати, що поверхня розміщена у вакуумі і заряджена рівномірно та позитивно, сумарний заряд поверхні рівний q . Визначимо напруженість електричного поля в т. М. Для зручності поверхню інтегрування виберемо сферичною (на малюнку

позначено S), радіус сфери - r . Розглянемо праву частину теореми Остроградського-Гауса.

$$\oint_S \mathbf{E}_n dS = E \oint_S dS = E 4\pi r^2$$

При обчисленні інтеграла ми встановили, що проекція вектора напруженості $\vec{E}_n$ на нормаль до поверхні S , в розглядуваному випадку, співпадатиме з самим вектором напруженості $\vec{E}$, а інтеграл по замкненій поверхні, яка є сферою, буде рівний площі сфери $\oint_S dS = S = 4\pi r^2$. Підставивши отримані результати в теорему Остроградського-

Гауса, отримаємо $E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$, або



Мал.3.4.

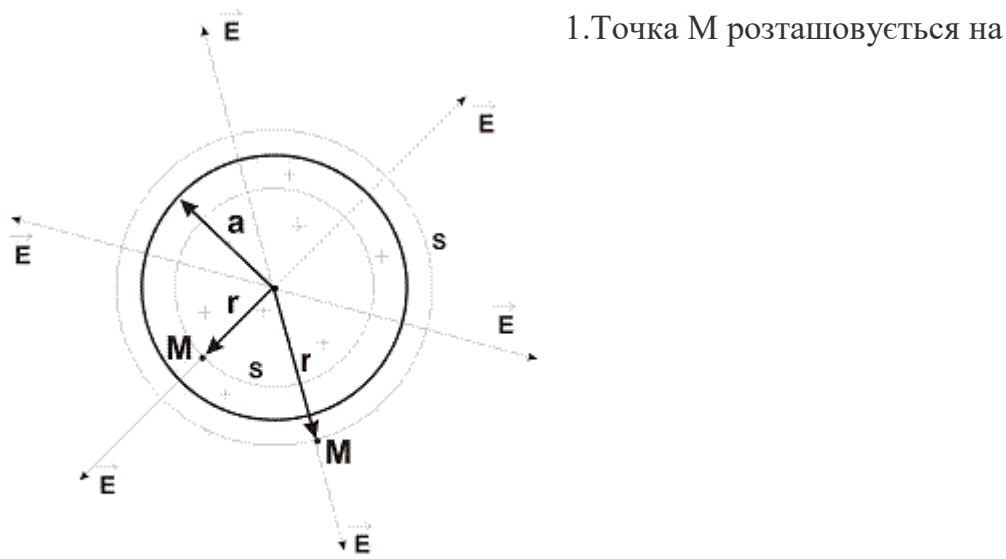
$$E = \frac{q}{4\epsilon_0 \pi r^2} \quad (3.5)$$

Формула 3.5. визначає напруженість електричного поля, створеного на

відстані $r > a$ зарядженої сфери. Також, використовуючи результати, отримані в попередній лекції, можна сказати, що електричне поле сфери таке ж, як полеточкового заряду q , поміщеного в центр сфери. Очевидно, що в середині сфери напруженість електричного поля

рівна нулю. Графічна залежність напруженості електричного поля сферичної поверхні матиме вигляд, як на мал.3.4.

г) Електричне поле, створене рівномірно зарядженою кулею. Розглянемо кулю радіуса a . З об'ємною густиною заряду (заряд, що припадає на одиницю об'єму) - ρ , заряд всередині позитивний та розподілений рівномірно. Використовуючи теорему Остроградського-Гауса, визначимо напруженість, створену кулею в точці M , розміщеній на відстані r від центра кулі (мал.3.5.). Для зручності поверхнею інтегрування оберемо сферу С радіус якої – r .



Мал.3.5.

відстані $r > a$. Проінтегрувавши праву частину теореми Остроградського-Гауса, як і в попередньому пункті, отримаємо:

$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \text{ або}$$

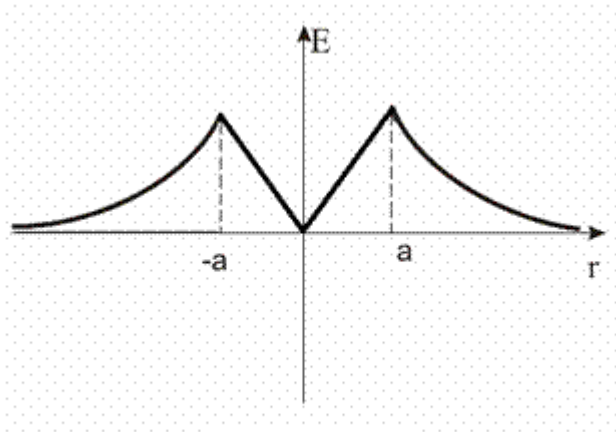
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (3.6.)$$

де q – заряд, обмежений поверхнею, S площа якої рівна $4\pi r^2$.

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi a^3, \quad (3.7.)$$

Підставивши 3.7. в 3.6. та провівши математичні спрощення, отримуємо:

$$E = \frac{a^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} \quad (3.8.)$$



Мал.3.6.

Формула (3.8.) описує поле, створене зарядженою кулею поза межами кулі. Формула 3.6. однакова як для сферичної поверхні, так і для точкового заряду.

2. Точка М знаходиться на відстані $r \leq a$. Повний заряд частини кулі, що обмежує

поверхня S радіусу r , провівши аналогічні міркування, як і в попередньому пункті,

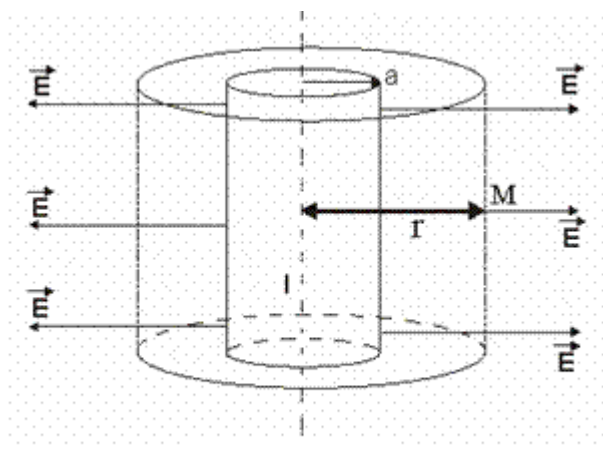
отримаємо $E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3$, або

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \quad (3.9)$$

Остання формула виражає залежність напруженості електричного поля від відстані всередині кулі. Враховуючи 3.8. та 3.9, побудуємо графік залежності $E=E(r)$ (мал.3.6).

д) Поле рівномірно зарядженої циліндричної поверхні.

Будемо вважати, що поверхня заряджена рівномірно з лінійною густиною заряду (заряд одиниці довжини циліндра) $-\eta$, радіус циліндра поверхня заряджена позитивно. Лінії напруженості електричного поля будуть напрямлені по радіусу основ циліндричної поверхні так, як це зображено на мал.3.6. Поверхню інтегрування, для зручності, виберемо циліндричною з радіусом r . Визначимо напруженість електричного поля в точці М, розміщеній на відстані r ($r \geq a$) від осі циліндра.



Мал.3.7.

Розглянемо потік ліній напруженості електричного поля, створеного зарядженою поверхнею через поверхню інтегрування – S.

$$\oint_S \mathbf{E}_n dS = E \oint_S dS = E 2\pi r l, \quad (3.10.)$$

тут використовувались такі міркування: в нашому випадку $\mathbf{E}_n = \mathbf{E}$; вектор напруженості та проекція вектора напруженості на нормаль

$$\oint_S dS = 2\pi r l$$

до S співпадають; $\oint_S dS = 2\pi r l$ - площа циліндричної поверхні інтегрування, де l-висота. Повний заряд циліндра висоти l:

$$q = \eta l \quad (3.11)$$

Використовуючи формули 3.10., т 3.11. та теорему Остроградського-Гауса отримаємо

$$E 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon_0} \eta l, \text{ або}$$

$$E = \frac{\eta}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (3.12)$$

Вираз 3.12 дає змогу визначити напруженість електричного поля, створеного циліндричною рівномірно зарядженою поверхнею з лінійною густиною η на відстані r від осі циліндра у випадку, коли $r \geq a$. Якщо розглянути область всередині циліндра ($r \leq a$) то напруженість буде рівна нулю $\mathbf{E} = 0$

Робота при переміщенні провідника із струмом у магнітному полі.

На провідник зі струмом силою I та довжиною l , поміщений в магнітне поле індукцією $\vec{B}$, діє сила Ампера $\vec{F} = k I \vec{B} l \cdot \sin \alpha$, під дією якої провідник здатний до переміщення на деяку відстань dx . Тоді робота з переміщення провідника може бути обрахована як $dA = F dx = I B l \sin \alpha dx = I d\Phi$. $l \cdot dx$ можна розглядати як елемент площі dS . Коли $I = \text{const}$, інтегруючи одержимо $A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I \Delta \Phi$.

Таким чином, робота магнітних сил дорівнює добуткові сили струму на зміну магнітного потоку через контур, обмежений провідником.

Магнітні моменти електронів і атомів. Вектор намагнічення. Діа-, пара- і феромагнетизм. Доменна структура феромагнетиків. Температура Кюрі. Крива намагнічення магнетиків: м'які і жорсткі феромагнетики та їх застосування. Ферити. Принципи записування і зчитування інформації на магнітних носіях.

МАГНІТНИЙ МОМЕНТ АТОМА

Внутрішнє магнітне поле $\vec{B}_1$ обумовлюється магнітними властивостями атомів.

Електрони, що обертаються навколо ядра, створюють магнітне поле, яке відповідає магнітному полю колового струму,— магнітний момент орбітального струму $\vec{P}_{\text{орб}}$.

Електрони, окрім маси m , заряду q , мають власне магнітне поле — спіновий магнітний момент $\vec{P}_{\text{спін}}$ (від «spin» — обертання) спінового «струму» (рис. 75), який зумовлений обертанням електрона навколо своєї осі.

Магнітний момент атома $\vec{P}_{\text{ат}}$ — векторна сума орбітальних і спінових магнітних моментів усіх його електронів:

$$\vec{P}_{\text{ат}} = \sum \vec{P}_{\text{орб}} + \sum \vec{P}_{\text{спін}} ;$$

$\vec{P}_{\text{ат}} = 0$, якщо магнітні моменти електронів в атомі скомпенсовані (наприклад атом Гелію) (рис. 76).

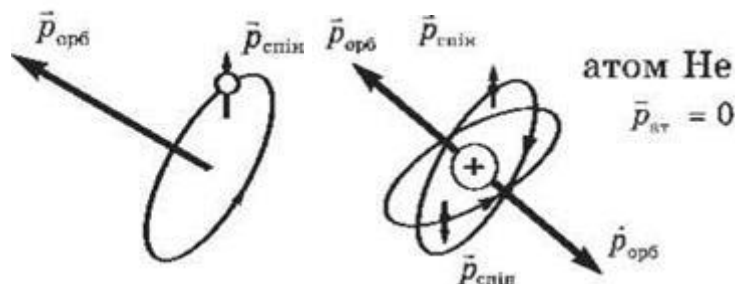
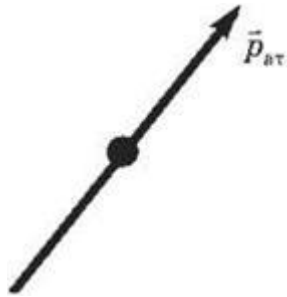


Рис. 75 Рис. 76

Якщо в атомі ряд магнітних моментів електронів не скомпенсований, $\vec{P}_{\text{ат}} \neq 0$ — навколо атома є магнітне поле з певним магнітним моментом, що відповідає магнітному полю колового струму (рис. 77).



ПАРА-, ДІА- І ФЕРОМАГНЕТИКИ

У зовнішньому магнітному полі $\vec{B}_0$ некомпенсовані магнітні моменти атомів орієнтуються за полем, створюючи внутрішнє поле $\vec{B}_1$ (парамагнітний ефект), але цьому перешкоджає тепловий рух атомів (рис. 78).

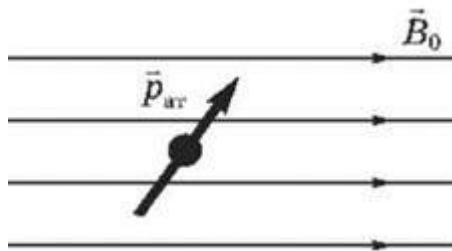


Рис. 78

В атомах речовин під впливом зовнішнього магнітного поля $\vec{B}_0$ обертання електронів видозмінюється таким чином, що в атомів з'являється магнітний момент, спрямований проти зовнішнього поля (діамагнітний ефект) (рис. 79).

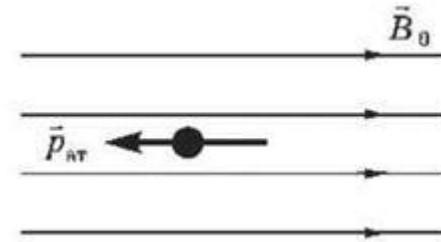


Рис. 79

Парамагнітні речовини (Na, Al та ін.) — це речовини, атоми яких мають $\vec{P}_{ат} \neq 0$. Парамагнітний ефект перекриває діамагнітний. Усередині парамагнетиків поле трохи підсилюється: $\mu > 1$.

Діамагнітні речовини (He, Cu та ін.) — це речовини, атоми яких не мають магнітного моменту $\vec{P}_{ат} = 0$. У них наявний тільки діамагнітний ефект. Усередині діамагнетиків поле трохи слабшає: $\mu < 1$.

Феромагнітні речовини — особлива група магнетиків (Fe, Ni, Co та деякі сплави). У феромагнетиках існують окремі ділянки, які називаються доменами, усередині яких магнітні моменти атомів в основному зумовлені некомпенсованими спіновими магнітними моментами електронів. Магнітні моменти атомів усередині доменів спонтанно орієнтуються в певному напрямі, утворюючи магнітний момент домену $\vec{P}_{\text{домену}}$ (рис. 80).

Магнітні моменти доменів хаотично орієнтовані в різних напрямках і, як правило, компенсують один одного.

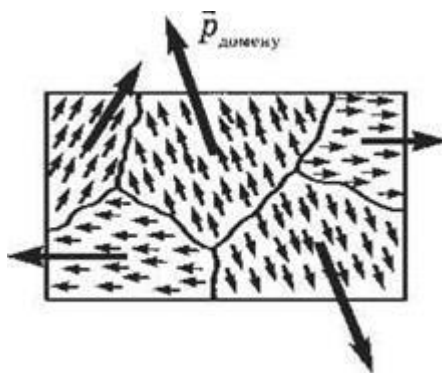


Рис. 80

ТОЧКА КЮРІ

Постійний штучний магніт — це смуга вуглецевої сталі, яку при виробництві довели до магнітного насичення. При цьому зберігається значною мірою орієнтація магнітних моментів атомів (рис. 81).

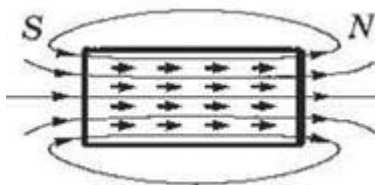


Рис. 81

Магнітне поле постійного магніту — це сукупність полів мікрострумів (орбітальних і спінових).

Нагрівання феромагнетиків призводить до їх розмагнічування, оскільки тепловий рух зумовлює порушення орієнтації магнітних моментів атомів і доменів.

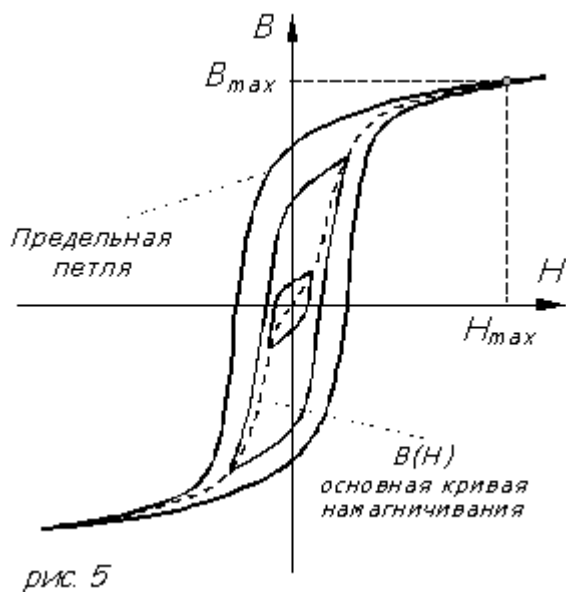
Точка Кюрі — температура, за якої повністю втрачається остаточна намагніченість: Fe — 768 °C, Ni — 365 °C, Co — 1140 °C.

Магнітна індукція у ферромагнітному матеріалі залежить не тільки від напруженості поля, але і від попереднього стану ферромагнетика. Це явище називається гистерезисом. Воно обумовлено ніби внутрішнім тертям, що виникає при зміні орієнтації магнітних моментів доменів.

При зміні напрямку струму, що намагнічує, а, отже, і напрямку напруженості поля і поступовому збільшенні струму зворотного напрямку напруженість полючи досягає значення H_c , названого коэрцитивной силою (відрізок Ов), при якому магнітна індукція $B=0$. При подальшому збільшенні струму і напруженості полючи магнітопровід намагнічується в протилежному напрямку і при напруженості полючи $H_g = -H_a$ магнітна індукція досягне значення $B_g = -B_a$. Потім при зменшенні струму і напруженості поля до нуля магнітна індукція B_d стає рівною $-B_b$. Нарешті, при наступній зміні напрямку струму і напруженості поля і збільшення її до колишнього значення H_a магнітна індукція збільшиться також до колишнього значення B_a . Розглянутий цикл перемагнічування ферромагнетика по кривій абвгдеа називається гістерезисним циклом (петлею гистерезиса).

Така симетрична замкнута петля гистерезиса (мал.) виходить у дійсності тільки після декількох перемагнічувань зі збільшенням струму до значення I_a . При перших циклах перемагнічування петля несиметрична і незамкнута. Найбільша замкнута петля, що може бути отримана для даного ферромагнітного матеріалу, називається граничної (мал. 5). При напруженості полючи $H > H_{max}$ виходить уже безгістерезисна ділянка кривій $B(H)$.

Якщо для даного ферромагнітного матеріалу, вибираючи різні найбільші значення струму I_a , одержати кілька симетричних петель гистерезиса (мал. 5) і з'єднати вершини петель, то одержимо криву, названу основній кривій намагнічування, близьку до кривої початкового намагнічування.



Циклічне перемагнічування можна застосувати для розмагнічування магнітопровода, тобто для зменшення залишкової індукції до нульового значення. З цією метою магнітопровід піддають впливові змінюються по напрямку і поступово зменшуваного магнітного поля.

Періодичне перемагнічування зв'язане з витратою енергії, що, перетворюючи в тепло, викликає нагрівання магнітопровода. Площа петель гистерезиса пропорційна енергії, витраченої при одному циклі перемагнічування. Енергія, витрачена на процес перемагнічування, називається втратами від гистерезиса. Потужність утрат на циклічне перемагнічування, що виражається звичайно у ватах на кілограм, залежить від матеріалу, максимальної

магнітної індукції і числа циклів перемагнічування в секунду або, що теж, частоти перемагнічування.

Ферромагнетики — сильно магнітні речовини, здатні намагнічуватися навіть у слабких магнітних полях. Деякі [метали](#) ([залізо](#), [нікель](#), [кобальт](#), [гадоліній](#), [манган](#), [хром](#) та їхні сплави)

з великою магнітною проникністю, що проявляють явище гістерезису; розрізняють м'які феромагнетики з малою коерцитивною силою та тверді феромагнетики з великою коерцитивною силою. Феромагнетики використовуються для виробництва постійних магнітів, осердь електромагнітів та трансформаторів.

Магнітні властивості речовини

1. Магнітні властивості речовини пояснюються замкнутими коловими струмами всередині речовини.

Магнітний момент (P) – це добуток сили струму на площу контура, обмеженого струмом.

$$P = IS$$

Магнітний момент електрона складається з орбітального і спінового магнітних моментів:

а) орбітальний магнітний момент електрона виникає внаслідок обертання електрона навколо ядра;

б) спіновий магнітний момент електрона виникає внаслідок обертання електрона навколо своєї осі.

Всі речовини поділяють на діа-, пара- і феромагнетики.

2. Діамагнетики – це речовини, у яких атоми і молекули не мають власних магнітних моментів при відсутності зовнішнього магнітного поля.

Приклади: інертні гази, золото, цинк, мідь, срібло, вода, скло.

Для діамагнетиків $\mu < 1$ (не набагато). Діамагнетик послаблює зовнішнє магнітне поле.

3. Парамагнетики – це речовини, у яких атоми і молекули мають власний магнітний момент при відсутності зовнішнього магнітного поля.

Приклади: кисень, алюміній, натрій, кальцій.

Для парамагнетиків $\mu > 1$ (не набагато). Парамагнетик підсилює зовнішнє магнітне поле.

Магнітні властивості діамагнетиків і парамагнетиків пояснюються орбітальними магнітними моментами електронів.

4. Феромагнетики – це сильно магнітні речовини, для яких $\mu \gg 1$.

Приклади: залізо, чавун, сталь.

Магнітні властивості феромагнетиків пояснюються спіновими магнітними моментами електронів.

Феромагнетики підсилюють зовнішні магнітні поля в багато разів, мають доменну структуру.

Доменни - це сильно намагнічені області феромагнетика дуже малих розмірів.

Явище магнітного гістерезису – це запізнювання зміни магнітної індукції феромагнетика в залежності від зміни напруженості зовнішнього магнітного поля.

1- петля магнітного гістерезису

2 - площа петлі магнітного гістерезису

5. Види феромагнетиків:

а) **жорсткі** – це феромагнетики, які мають велику залишкову намагніченість (велика площа петлі).

Приклади: вуглецева сталь, хромована сталь.

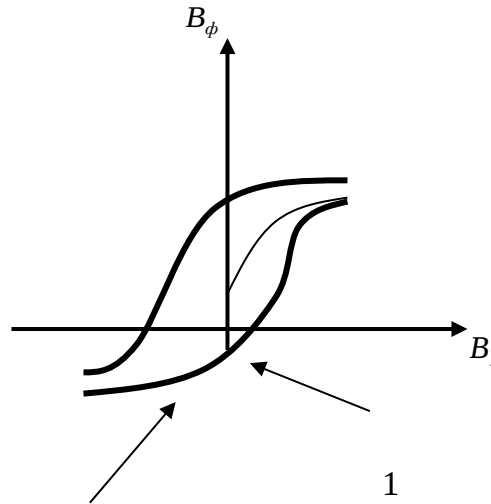
Виготовляють постійні магніти.

б) **м'які** – це феромагнетики, які мають малу залишкову намагніченість (мала площа петлі). Приклади: чисте залізо, електротехнічна сталь. Виготовляють осердя трансформаторів, двигунів, генераторів.

в) **ферити** – це оксиди заліза з іншими оксидами металів (дуже мала площа петлі). Виготовляють магнітні антени, феритові кільця, трансформатори.

Точка Кюрі – це температура, при якій зникають магнітні властивості речовини.

Для заліза - 770°C .



Принцип магнітного запису цифрової інформації

Основу процесу цифрового магнітного запису складає взаємодія магнітних головок та магнітного носія інформації, які рухаються одні відносно інших. Магнітні головки являють собою мініатюрні електромагніти, що розміщують у поверхні магнітного носія з невеликим зазором (безконтактний метод) або без зазору (контактний метод).

Таким чином в процесі магнітного запису беруть участь мініатюрний електромагніт (головка) з сердечником із низькокоерцетивного матеріалу, який має малу залишкову намагніченість та магнітний шар носія з висококоерцетивного магнітного матеріалу з великою залишковою

намагніченістю. Цей магнітний шар зберігає магнітний стан, переданий магнітною головкою ділянці поверхні, довгий час.

Для запам'ятовування двійкової інформації використовують два протилежних стани насичення магнітного матеріалу носія. Ці стани утворюються шляхом перемагнічування відрізків поверхні носія імпульсами різної полярності в обмотці магнітної головки. На поверхні магнітного носія під магнітною головкою утворюється послідовність елементарних магнітів (магнітних відбитків), чергування полярності яких буде відтворювати чергування одиниць та нулів в кодовій комбінації, що записується .

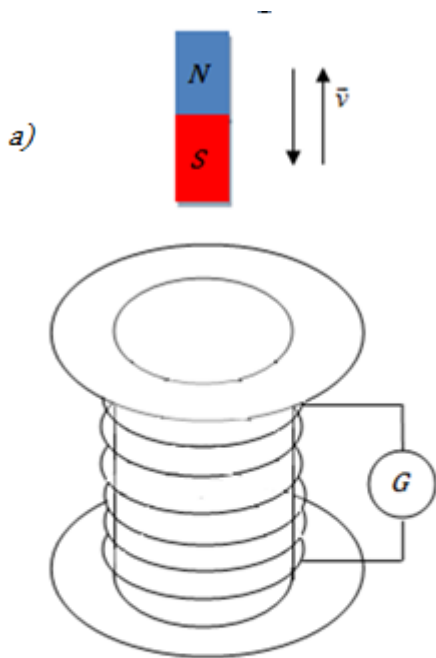
Матеріал для самостійного вивчення з теми

2.1.4.1. Явище електромагнітної індукції. Досліди Фарадея. Основний закон електромагнітної індукції. Правило Ленца. Виведення закону Фарадея із закону збереження електричної енергії. Вихрові струми (струми Фуко). Самоіндукція. Індуктивність контуру. Струми при замиканні і розмиканні кола. Явище взаємної індукції. Трансформатори. Енергія магнітного поля.

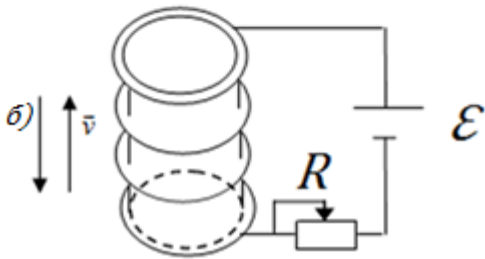
Явище електромагнітної індукції.

Закон Фарадея

1. Досвіди Фарадея



а) У соленоїд, замкнений на гальванометр, вдвигається й висувається постійний магніт. На гальванометрі буде відхилення стрілки, і воно буде тим більше, чим швидше відбувається вдвигання й висування. При зміні полюсів магніту напрямок відхилення стрілки зміниться.



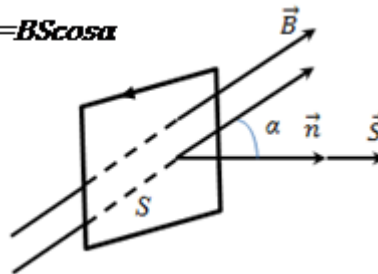
б) У соленоїд, замкнений на гальванометр, вставлена котушка (інший соленоїд), через яку пропускається струм. При включенні й вимиканні (тобто при будь-якій зміні струму) відбувається відхилення стрілки гальванометра. Напрямок відхилення змінюється при включенні – вимиканні, зменшенні – збільшенні струму, вдвиганні – висуванні котушок.

Явище електромагнітної індукції полягає в тому, що в замкненому провідному контурі при зміні потоку магнітної індукції, охоплюваного цим контуром, виникає індукційний (наведений) електричний струм.

Виникнення індукційного струму означає, що в контурі

$$\Phi_B = BS \cos \alpha$$

діє електрорушійна сила $\mathcal{E}_i$ – ЕДС індукції.



ЕРС індукції, що виникає в провідячому колі, дорівнює швидкості зміни магнітного потоку крізь площину, обмежену цим контуром.

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

В 1834 г. Є.Х. Ленц установив закон, що дозволяє визначити напрямок індукційного струму.

Правило Ленца: індукційний струм у контурі завжди має такий напрямок, що створюване їм магнітне поле перешкоджає зміні магнітного потоку, що викликав цей індукційний струм.

Знак мінус у законі Фарадея є математичним вираженням правила Ленца.

Якщо контур, у якому індуюється ЕРС, полягає не з одного витка, а з N витків (наприклад, соленоїд), то якщо витки з'єднані послідовно, $\mathcal{E}$ буде дорівнювати сумі ЕРС, індуктованих у кожному з витків окремо:

:

$$\mathcal{E}_i = -\sum_i \frac{d\Phi_i}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_i d\Phi_i = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

$$\Psi = \sum_i d\Phi_i \quad \text{-потокосцеплення або повний магнітний потік.}$$

$$[\Psi] = B\delta.$$

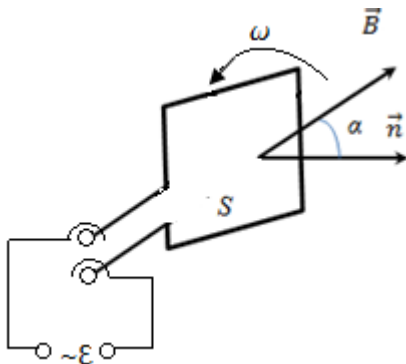
Якщо $\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_n$, то

$$\Psi = N\Phi.$$

Т.як. $\Phi_B = BS \cos \alpha$, то для того щоб змінити магнітний потік Φ можна змінити:

- 1) магнітне поле $\vec{B}$;
- 2) площа S ;
- 3) кут α .

Обертання рамки в магнітному полі



Явище електромагнітної індукції використовується для перетворення механічної енергії й енергії електричного струму в генераторах

Рамка площею S обертається в однорідному магнітному полі

($\vec{B} = \text{const}$) рівномірно з постійною кутовою швидкістю ω .

$$\alpha = \omega t.$$

Тоді

$$\Phi = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t.$$

$$\mathcal{E}_i = \frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t.$$

При $\sin \omega t = 1$

$$\mathcal{E}_{i\max} = BS\omega.$$

і

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{i\max} \sin \omega t.$$

Т.як частота мережі $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 50 \text{ Гц} = \text{const}$, то для збільшення $\mathcal{E}_{i\max}$ потрібно збільшувати B и S . B можна побільшати, застосовуючи потужні постійні магніти, або в електромагнітах пропускати більші струми. Сердечник електромагніту вибирають із більшим μ . Для збільшення S використовують багато виткових обмотки.

Якщо через рамку, поміщену в магнітному полі, пропускати електричний струм, то на неї буде діяти обертаючий момент

$$M_{\text{вр}} = B p_m = BIS$$

і рамка почне обертатися. На цьому принципі заснована робота електродвигунів, призначених для перетворення електричної енергії в механічну.

. Виведення закону електромагнітної індукції із закону збереження енергії, а також на основі електронної теорії

Німецький фізик Гельмгольц показав, що основний закон електромагнітної індукції - закон Фарадея - є наслідком закону збереження енергії.

Помістимо в однорідне магнітне поле з індукцією $\vec{B}$ провідник завдовжки l з опором R , який є ділянкою замкнутого кола $CDKL$ (рис. 194).

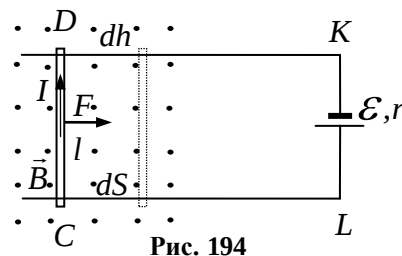


Рис. 194

Опором з'єднувальних провідників DK , KL і LC нехтуємо. Провідник DC рухається без тертя по ділянках DK і LC .

Джерело постійного струму з EPC $\mathcal{E}$ і внутрішнім опором r створює в замкнутому колі струм I :

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

При цьому на провідник l діє сила Ампера $F = BIl$, внаслідок чого провідник

переміщуватиметься прискорено і за час dt пройде шлях dh . При проходженні струму I в замкненому колі $CDKL$ протягом часу dt відбуваються такі процеси:

а) виконується робота на подолання електричного опору $(R+r)$ кола:

$$dA_1 = I^2(R+r)dt;$$

б) виконується механічна робота при переміщенні провідника на шляху dh :

$$dA_2 = Fdh = IBldh = IBdS = Id\Phi_B.$$

За законом збереження енергії сума робіт dA_1 і dA_2 повинна дорівнювати повній роботі джерела струму $dA = \mathcal{E}Idt$, тобто

$$I^2(R+r)dt + Id\Phi_B = \mathcal{E}Idt.$$

Звідси

$$I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi_B}{dt}}{R+r}.$$

Ця формула виражає закон Ома для замкнутого кола, яке поміщене в магнітне поле. Роль діючої EPC в такому колі відіграє вираз

$$\mathcal{E} - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{або} \quad \mathcal{E} + \left(-\frac{d\Phi_B}{dt}\right).$$

Додатковий член $-\frac{d\Phi_B}{dt}$, який відрізняється від нуля тільки у разі зміни магнітного потоку через поверхню dS повинен мати розмірність EPC . Він і визначає EPC індукції $\mathcal{E}_i$:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

EPC електромагнітної індукції виникає не тільки в замкненому контурі, а й на відрізку провідника, який, рухаючись перетинає лінії індукції магнітного поля.

Для спрощення вважатимемо, що відрізок прямолінійного металевого провідника DC завдовжки l рухається із сталою швидкістю $\vec{u}$ перпендикулярно до вектора $\vec{B}$ магнітної індукції (рис. 195). На електрони провідності металу діє сила Лоренца

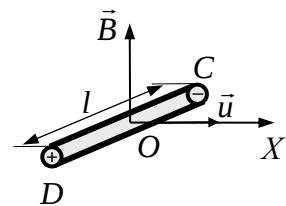


Рис. 195

$$\vec{F}_L = -e[(\vec{u} + \vec{u}')\vec{B}],$$

де $\vec{u}'$ - швидкість впорядкованого руху електронів вздовж провідника. Ця швидкість зумовлена дотичною до провідника складовою сили Лоренца $\vec{F}'_L = -e[\vec{u}\vec{B}]$ і напрямлена від D до C . Вона відмінна від нуля лише на початку руху провідника, оскільки впорядкований рух електронів уздовж провідника від D до C викликає виникнення у провіднику електростатичного поля, яке заважає подальшому перерозподілу електронів. Вектор $\vec{E}$ напруженості цього поля

напрявлений від D до C і числово дорівнює:

$$E = \frac{\Delta\varphi}{l} = \frac{\varphi_D - \varphi_C}{l}.$$

Сила $e\vec{E}$, що діє на електрон з боку електричного поля, протилежна за напрямком до сили Лоренца. Якщо числові значення цих сил дорівнюють одне одному, то подальший рух електронів в провіднику припиниться.

Тому для рівноважного стану ($u' = 0$) маємо $eE = euB$ або $\frac{\Delta\varphi}{l} = uB$.

За законом Ома для розімкненого кола ($I = 0$) $\Delta\varphi = \varphi_D - \varphi_C = -\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ - електрорушійна сила, яка виникла у провіднику DC . Оскільки на ділянці DC гальванічних елементів, або інших джерел струму немає, то $\mathcal{E} = \mathcal{E}_i$. Тоді

$$\mathcal{E}_i = -Blv.$$

Тому що швидкість v руху провідника вздовж OX дорівнює $\frac{dx}{dt}$, то

$$\mathcal{E}_i = -Bl \frac{dx}{dt} = -B \frac{dS}{dt},$$

де $dS = ldx$ – площа поверхні, яку описує провідник під час руху за час dt .

Оскільки $BdS = d\Phi_B$ – магнітний потік через цю поверхню, то,

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Зміст правої частини рівняння для контуру і відрізка провідника різний. У першому випадку $\frac{d\Phi_B}{dt}$ - швидкість зміни магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром. У другому - це відношення магнітного потоку крізь поверхню, яку описує провідник під час руху за дуже малий проміжок часу, до величини dt цього проміжку. Тому $\frac{d\Phi_B}{dt}$ - швидкість перетину провідником ліній індукції магнітного поля.

Струми Фуко.

Індукційні струми можуть збуджуватися й у суцільних масивних провідниках. У цьому випадку їх називають струмами **Фуко** або вихровими струмами. Електричний опір масивного провідника мало, тому струми Фуко можуть досягати дуже великої сили.

Струми Фуко, як і індукційні струми в лінійних провідниках, підкоряються правилу Ленца: їх магнітне поле спрямоване так, щоб протидіяти зміні магнітного

поля, індуючого вихрові струми. Що тому рухаються в сильному магнітному полі гарні провідники випробовують сильне гальмування, обумовлене взаємодією струмів Фуко з магнітним полем. Це використовують для демпфірування (заспокоєння) рухливих частин гальванометрів, сейсмографів і т.п. Теплова дія струмів Фуко використовується в індукційних плавильних печах.

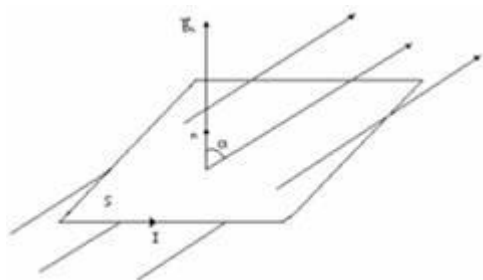
Для зменшення струмів Фуко сердечники трансформаторів роблять із окремих пластин і пластини перпендикулярні струмам Фуко.

Внаслідок виникнення вихрових струмів швидкозмінний струм нерівномірно розподілений по перетину проведення - він витісняється на поверхню провідника - *скін-ефект*. Тому на високих частотах використовують порожні проведення.

Магнітний потік. Електромагнітна індукція

Магнетним потоком (потоком магнетної індукції) Φ через поверхню S називають фізичну величину, яка дорівнює добутку B_n (проекції вектора магнітної індукції на нормаль до поверхні) на площу (Рис.47):

$$\Phi = B S \cdot \cos \alpha.$$



Магнетний потік є скалярною величиною. У СІ одиницею магнетного потоку є вебер (Вб). Магнетний потік Φ може бути позитивним ($\Phi > 0$) і негативним ($\Phi < 0$). Знак залежить від вибору позитивного напрямку нормалі. Напрямок нормалі визначається напрямком струму в контурі. За додатний напрям її вибирають такий, що збігається з напрямком переміщення гвинта з правою нарізкою під час обертання його в напрямі струму.

Електричні струми створюють навколо себе магнетне поле. А чи можна за допомогою змінного магнетного поля отримати електричний струм? Цю задачу розв'язав у 1831 р. М.Фарадей.

В замкненому провідному контурі при зміні магнетного потоку, охопленого цим контуром, виникає електричний струм, який отримав назву *індукційного*, а саме явище – *явище електромагнетної індукції*.

При внесенні магнету в котушку, приєднану до гальванометра, стрілка відхилялась в одному напрямку, при винесенні магнету – в протилежну (Рис.48).

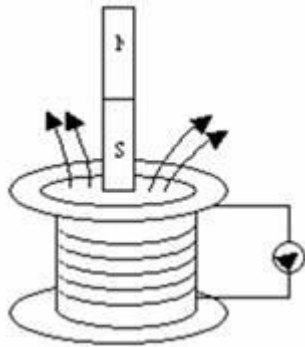


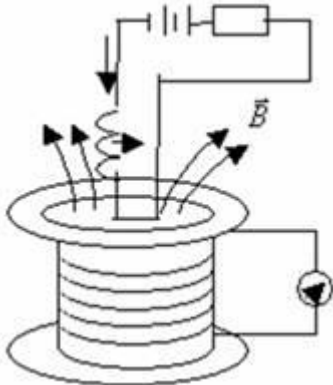
Рисунок 1

Якщо магнет нерухомий, то струму немає.

Можна переміщати котушку відносно нерухомого магнету, при цьому гальванометр показує струм.

Можна вносити провідник із струмом в котушку, при цьому також виникає індукційний струм (Рис.49).

Між змінними електричним і магнетними полями існує тісний зв'язок: електричне поле породжує магнетне і, навпаки, магнетне породжує електричне. Явище електромагнетної індукції полягає у виникненні індукційного струму в будь-якому замкненому провідному контурі при зміні магнетного потоку, який пронизує цей контур. Індукційний струм виникає, якщо рухати котушку або магніт так, щоб змінювалась кількість ліній магнетної індукції, які пронизують замкнутий контур



Індукційний струм виникає завжди, якщо силові лінії перетинають витки котушки.

Дослідами було встановлено, що величина індукційного струму не залежить від засобу зміни потоку магнетної індукції, а визначається лише швидкістю його зміни. Цим був встановлений зв'язок між електричними і магнетними явищами, що в подальшому став поштовхом для розробки теорії електромагнетного поля.

Закон Фарадея для електромагнетної індукції:

$$e_i = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} .$$

Якщо у котушці існує n витків, ЕРС в n раз буде більшою:

$$\varepsilon_i = -n \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

ЕРС електромагнетної індукції в контурі чисельно дорівнює і протилежно напрямлена за знаком швидкості зміни магнетного потоку через поверхню, обмежену цим контуром.

Знак “ – “ показує, що поле індукційного струму напрямлене назустріч потоку, тобто за правилом Ленца (1833 р.):

індукційний струм у замкненому контурі направлений
так, що створений ним магнетний потік через
площину, обмежену контуром, протидіє зміні
магнетного потоку, який збуджує даний струм.

Пізніше Максвелл пояснив явище: будь-яке змінне магнетне поле збуджує в оточуючому просторі змінне електричне поле, яке і являється причиною виникнення індукційного струму в провіднику.

При переміщенні провідника довжиною ℓ в магнетному полі з швидкістю v він описує площу: $\Delta S = v \Delta t$, тоді

$$e_i = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - \frac{BS}{\Delta t} = - \frac{B \cdot \ell \cdot v \cdot \Delta t}{\Delta t} = - B \ell v$$

Якщо вектор швидкості v складає з напрямком B кут α , тоді

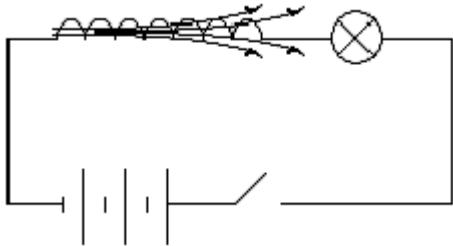
$$e_i = - B \ell v \sin \alpha$$

У масивних металевих провідниках, які рухаються в магнетному полі, виникають короткозамкнені індуквані струми. Ці струми називаються вихровими. Відкрив і дослідив ці струми французький фізик Фуко, ім'ям якого їх називають (струми Фуко). Напрями струмів Фуко, визначають за правилом Ленца.

В більшості випадків вихрові струми шкідливі, їх намагаються зменшити. Вихрові струми використовують для нагрівання або плавлення металів (індукційні печі).

Окремим випадком явища електромагнетної індукції є *самоіндукція* – явище виникнення ЕРС індукції в електричному колі внаслідок зміни струму в ньому.

В момент замикання електричного кола струм збільшується від 0 до $I_{\max}$ за Δt , при цьому збільшується і магнетний потік Φ , який створює котушка. Цей потік перетинає витки котушки і за законом Ленца створює в провіднику ЕРС, яка перешкоджає зростанню струму, тобто змінюється електричний струм, що в провіднику створює ЕРС (Рис.50).



ЕРС самоіндукції виникає при будь-якій зміні струму в колі, в тому разі й при розімкненні струму в колі.

$$e_c = - L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

ЕРС самоіндукції пропорційна швидкості зміни сили струму.

L – індуктивність $L = \text{Гн}$ (Генрі). Фізичний зміст індуктивності:

$L = e_c$, якщо $\frac{\Delta I}{\Delta t} = 1$

Генрі – це індуктивність котушки, в якій зміна струму на 1 А в 1 с збуджує ЕРС самоіндукції 1 В.

Індуктивність залежить від розмірів, форми, числа витків котушки. Індуктивність дуже зростає при внесенні в середину осердя з феромагнітного матеріалу.

Додатковий струм, який виникає в провіднику, називається екстраструмом. Екстраструм протилежно направлений зростаючому і збігається зі струмом джерела, якщо той зменшується.

Швидкість зміни магнетного потоку Φ прямо пропорційна швидкості зміни електричного струму I :

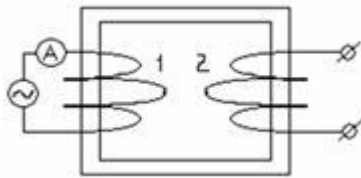
$$\Phi = LI$$

Величина, яка дорівнює відношенню індуктивності L контуру в однорідному середовищі до індуктивності L_0 контуру у вакуумі, є відносною магнетною проникністю середовища:

$$\mu = \frac{L}{L_0}$$

Відносна магнетна проникність характеризує магнетні властивості речовини - величина безрозмірна.

Якщо контур, який складається з провідника, помістити поблизу від контуру 1 зі струмом, що змінюється з часом, то в другому провіднику ми зафіксуємо індуковане електричне поле (Рис.51).



Явище виникнення індуковано-електричного поля в провідниках, розміщених поблизу від інших провідників, по яких проходить змінний у часі електричний струм, називається взаємодукцією.

На явищі взаємної індукції ґрунтується дія трансформаторів – пристроїв, призначених для перетворення напруги й сили змінного струму. Він складається з двох обмоток (катушок) з різною кількістю витків на спільному сталевому замкнутому осерді. Обмотка, що приєднується до генератора змінного струму, називається первинною, а обмотка, що приєднується до навантаження, – вторинною. Відношення індукованих в обмотках електрорушійних сил дорівнює відношенню наявності витків у цих обмотках:

$$\frac{U_1}{U_2} \approx \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{n_1}{n_2} = k$$

Де k - коефіцієнт трансформації. Якщо напруга U_1 в первинній обмотці менша за напругу U_2 , то трансформатор підвищувальний і знижувальний, якщо $U_1 > U_2$.

Для створення струму в контурі необхідно виконати роботу для подолання ЕРС самоіндукції, тобто затратити деяку енергію. Ця енергія накопичується магнітним полем контуру зі струмом. Вона виділяється при розмиканні кола. Енергія магнетного поля струму визначається за формулою:

$$W_M = \frac{LI^2}{2}$$

Коли провідник зі струмом переміщується під дією сил магнетного поля, виконується робота, що дорівнює добутку сили струму на зміну магнетного потоку:

$$A = I (\Phi_2 - \Phi_1) = I D\Phi$$

Явище самоіндукції. Індуктивність

Згідно із закону Фарадея, електрорушійна сила індукції $\mathcal{E}_i$ виникає при будь-яких змінах магнітного потоку Φ_B через поверхню, охоплену провідним контуром, незалежно від природи цього потоку і рівна

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}.$$

Під час проходження по контуру непостійного струму власний магнітний потік змінюється і в контурі теж наводиться ЕРС індукції.

Явище виникнення в контурі ЕРС індукції при змінах власного магнітного потоку, пов'язаних із зміною струму в цьому контурі, називається **самоіндукцією**. Електрорушійна сила в цьому випадку називається ЕРС самоіндукції $\mathcal{E}_c$.

Отже, самоіндукція – це окремий випадок загального явища електрорушійної індукції.

Розглянемо соленоїд, що має N витків, по яких проходить струм I від зовнішнього джерела. Цей струм створює в соленоїді магнітне поле, яке зосереджене в його об'ємі і це поле можна вважати однорідним. Нехай весь об'єм магнітного поля соленоїда заповнений однорідною речовиною з відносною магнітною проникністю μ . Якщо змінювати струм в соленоїді, то власний магнітний потік Φ_B , який пронизує його поперечний переріз, теж змінюватиметься. Магнітний потік Φ_{B_l} крізь площу S , що обмежена одним витком, дорівнює

$$\Phi_{B_l} = BS = \mu\mu_0 nSI = \mu\mu_0 \frac{NS}{l} I,$$

де l – довжина соленоїда.

За законом Фарадея

$$\mathcal{E}_c = -N \frac{d\Phi_{B_l}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l} I \right).$$

Допустимо, що сили, які деформують соленоїд, дуже малі і тому l і S залишаються сталими. Якщо всередині соленоїда знаходиться феромагнітне осердя, то магнітний потік Φ_B змінюється не лише внаслідок зміни сили струму I , але і від зміни μ . Позначимо

$$\mu\mu_0 \frac{N^2}{l} S = L.$$

Тоді

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d}{dt}(LI) = -L \frac{dI}{dt} - I \frac{dL}{dt}.$$

Якщо магнітна проникність середовища μ не змінюється, то

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}.$$

ЕРС самоіндукції прямо пропорційна швидкості зміни сили струму в контурі.

Параметр L характеризує індивідуальні властивості контуру. Його називають **коефіцієнтом індуктивності**, або просто **індуктивністю** контуру.

Індуктивність контуру залежить від форми контуру, його розмірів та відносної магнітної проникності середовища, в якому він знаходиться.

З виразів для $ЕРС$ самоіндукції, а саме

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt} \quad \text{та} \quad \mathcal{E}_c = -N \frac{d\Phi_{B_l}}{dt} = -\frac{d\psi_c}{dt},$$

де ψ_c - потокозчеплення самоіндукції, отримуємо, що

$$LdI = d\psi_c.$$

Після інтегрування ця рівність має вигляд:

$$LI = \psi_c.$$

Отже, індуктивністю замкненого контуру називається скалярна величина L , яка дорівнює відношенню потокозчеплення самоіндукції контуру ψ_c до сили струму I в цьому контурі:

$$L = \frac{\psi_c}{I}.$$

Одиниця індуктивності – генрі ($Гн$): $1 Гн$ – індуктивність такого контуру, потокозчеплення самоіндукції якого при струмі $1 А$ дорівнює $1 Вб$.

Формулу $\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}$ можна використати для провідників довільної форми, якщо знайти потокозчеплення $\psi_c = LI$, яке зв'язане з цим провідником при силі струму I .

У виразі для $ЕРС$ самоіндукції знак „–”, зумовлений правилом Ленца, показує, що наявність індуктивності контура приводить до сповільнення зміни струму в ньому. Тобто індуктивність контуру є мірою його інертності відносно зміни струму.

Якщо струм з часом збільшується, то $\frac{dI}{dt} > 0$ і, $\mathcal{E}_c < 0$, тобто струм самоіндукції напрямлений назустріч струму, який зумовлений зовнішнім джерелом і гальмує його зростання. Якщо струм з часом зменшується, то $\frac{dI}{dt} < 0$, і $\mathcal{E}_c > 0$, тобто індукційний струм має такий напрямок, як і спадний струм в контурі, і сповільнює його зменшення.

Явище самоіндукції найбільш яскраво проявляється у виникненні так званих **екстраструмів замикання та екстраструмів розмикання** в колах, що містять котушки з

великою індуктивністю.

Знайдемо закон зміни струму в колі, індуктивність якого L , а електричний опір - R , під час вмикання в це коло і вимикання з нього джерела ЕРС $\mathcal{E}$. Сила струму I дорівнює

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_i}{R},$$

де $\mathcal{E}$ - алгебраїчна сума ЕРС джерел струму, ввімкнених в коло, а $\mathcal{E}_i$ - ЕРС індукції. Якщо зовнішнє магнітне поле постійне, то індукційні явища в нерухомому колі зумовлені лише явищем самоіндукції, тому

$$I = \frac{\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}}{R}.$$

Розділимо змінні в цьому рівнянні:

$$IR = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt}, \quad \frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E} - IR}{L}.$$

Звідси

$$\frac{dI}{\mathcal{E} - IR} = \frac{dt}{L}.$$

Вважаючи $\mathcal{E}$, R та L сталими та інтегруючи, дістанемо

$$-\ln(\mathcal{E} - IR) = \frac{R}{L}t + \ln C,$$

де C - довільна стала інтегрування.

Потенціюючи дане рівняння, маємо

$$\mathcal{E} - IR = Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

В початковий момент часу $t = 0$ сила струму дорівнює I_0 .

Тоді

$$\mathcal{E} - I_0 R = C.$$

В результаті

$$\mathcal{E} - IR = (\mathcal{E} - I_0 R) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Звідси знайдемо вираз для сили струму:

$$IR = I_0 R e^{-\frac{R}{L}t} + \mathcal{E} - \mathcal{E} e^{-\frac{R}{L}t}$$

і

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Для випадку вмикання джерела ЕРС початковий струм $I_0 = 0$ і отримуємо вираз для

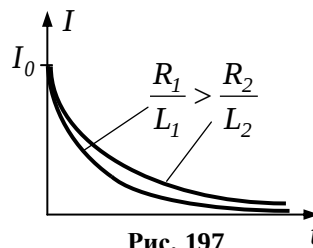


Рис. 197

екстраструму замикання

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

Струм у колі поступово збільшується від нуля при $t = 0$ до значення $\frac{\mathcal{E}}{R}$, яке відповідає величині постійного струму (рис. 196). Зростання струму відбувається тим швидше, чим біль-

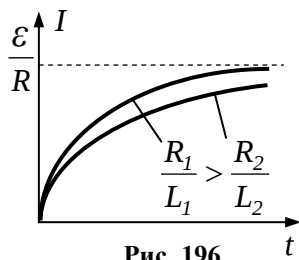


Рис. 196

ше відношення $\frac{R}{L}$.

Для випадку вимикання джерела ЕРС $\mathcal{E} = 0$, і екстраструм розмикання змінюється за законом

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Струм у колі поступово зменшується від початкового значення I_0 до нуля за експоненціальним законом (рис. 197). Струм зменшується тим швидше, чим більше значення $\frac{R}{L}$, тобто чим більший опір кола і чим менша його індуктивність.

Явище взаємної індукції. Взаємна індуктивність

Якщо два контури розміщені так, що магнітний потік, який створюється струмом в одному з них, хоч частково пронизує другий контур, то такі контури індуктивно пов'язані між собою і між ними виникає **взаємоіндукція**.

Розглянемо два нерухомі контури, індуктивності яких L_1 і L_2 , що розміщені досить близько один від одного (рис. 198). Якщо в контурі 1 тече струм I_1 , то магнітний потік, що створюється цим струмом, пропорційний до I_1 .

Позначимо $\Phi_{B_{12}}$ ту частину потоку, яка пронизує контур 2. Тоді

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1,$$

де L_{12} - коефіцієнт пропорційності.

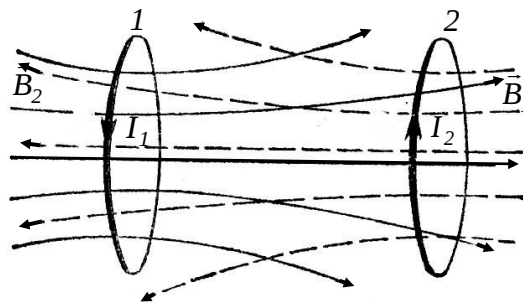


Рис. 198

Якщо струм I_1 змінюється, то в

контурі 1 індукція ЕРС $\mathcal{E}_{i_2}$, яка за законом Фарадея дорівнює швидкості зміни магнітного потоку $\Phi_{B_{12}}$:

$$\mathcal{E}_{i_2} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_1}{dt}.$$

Аналогічно, при протіканні в контурі 2 струму I_2 магнітний потік пронизує перший контур. Якщо $\Phi_{B_{12}}$ - частина потоку, що пронизує контур 1, то

$$\Phi_{B_{12}} = L_{21} I_2.$$

Якщо струм I_2 змінюється, то в контурі 1 індукується ЕРС $\mathcal{E}_{i_1}$:

$$\mathcal{E}_{i_1} = -\frac{d\Phi_{B_{21}}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_2}{dt}.$$

Контури 1 і 2 називаються зв'язаними. Коефіцієнти L_{12} і L_{21} називаються взаємною індуктивністю контурів.

Вони є мірою магнітного індуктивно зв'язку між двома контурами і характеризують їх здатність збуджувати ЕРС індукції в одному з них при зміні струму в другому.

Розрахунки показують, що

$$L_{12} = L_{21}.$$

Коефіцієнти L_{12} і L_{21} залежать від геометричної форми, розмірів, взаємного розміщення контурів і від магнітної проникності середовища, яке оточує контури.

Розрахуємо взаємну індуктивність двох котушок, які намотані на спільне тороїдальне осердя (рис. 199). Магнітна індукція поля, що створюється в осерді з магнітною проникністю

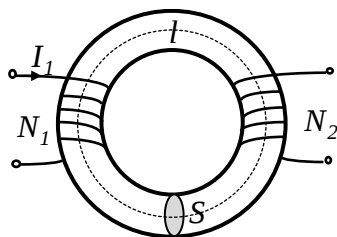


Рис. 199

μ , струмом силою I_1 в першій котушці з кількістю витків N_1 , дорівнює:

$$B_1 = \mu\mu_0 \frac{N_1 I_1}{l},$$

де l - довжина осердя по середній лінії.

Магнітний потік через один виток другої котушки

$$\Phi_{B_2} = B_1 S = \mu\mu_0 \frac{N_1 I_1}{l} S.$$

Тоді потокозчеплення через вторинну обмотку, що має N_2 витків,

$$\psi_2 = \Phi_{B_2} N_2 = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S I_1.$$

Потокозчеплення ψ_2 створюється струмом I_1 , тому отримуємо

$$L_{12} = \frac{\psi_2}{I_1} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

Якщо обчислити потокозчеплення, що створюється котушкою 2 через котушку 1, коли по котушці 2 проходить струм I_2 , то отримуємо

$$L_{21} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

Отже,

$$L_{12} = L_{21}.$$

Оскільки індуктивність контурів

$$L_1 = \mu\mu_0 \frac{N_1^2}{l} S \quad \text{і} \quad L_2 = \mu\mu_0 \frac{N_2^2}{l} S,$$

то коефіцієнти взаємодукації

$$L_{12} = L_{21} = L_1 \frac{N_2}{N_1} = L_2 \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{L_1 L_2}.$$

Енергія магнітного поля

Провідник, по якому протікає електричний струм, завжди оточений магнітним полем, причому магнітне поле появляється і зникає разом з появою і зникненням струму. Отже, частина енергії струму йде на створення магнітного поля.

Енергія магнітного поля дорівнює роботі, яка затрачається струмом на створення цього поля.

Обчислимо енергію магнітного поля струму у випадку ізотропного середовища, в якому зв'язок індукції з напруженістю поля в ньому лінійний. Для цього розглянемо соленоїд з N витків, який має індуктивність L . Якщо за час dt струм у соленоїді зростає на величину dI , то при цьому змінюється і його власний магнітний потік відповідно на величину $d\Phi_B$. Якщо в момент часу t сила струму в соленоїді була I , то при зміні магнітного потоку на величину $d\Phi_B$, джерелом струму виконується додаткова робота dA :

$$dA = Id\Phi_B.$$

Оскільки соленоїд залишається нерухомим, то ця елементарна робота dA пов'язана із зміною енергії соленоїда, яка зумовлена наявністю в ньому магнітного поля, на величину dW_m :

$$dW_m = dA \quad \text{і} \quad dW_m = Id\Phi_B.$$

Оскільки $d\Phi_B = LdI$, то $dW_m = LIdI$.

Інтегруючи цей вираз, знаходимо

$$\int_0^{W_M} dW_M = \int_0^I LI dI; W_M = \frac{LI^2}{2}.$$

Це та енергія, яку було затрачено джерелом струму на утворення в соленоїді магнітного поля. За законом збереження енергії ця енергія дорівнює енергії магнітного поля W_M , яке пов'язане зі струмом I , що проходить по провіднику з індуктивністю L .

Оскільки $LI = \psi_c$, то вираз для енергії магнітного поля контуру зі струмом можна записати в такому вигляді:

$$W_M = \frac{\psi_c I}{2}.$$

Дослідження властивостей змінних магнітних полів було доказом того, що енергія магнітного поля локалізована у просторі.

Енергію магнітного поля струму можна визначити через характеристики цього поля - значення його напруженості H та індукції B . Для цього розглянемо частковий випадок – однорідне магнітне поле всередині довгого соленоїда, індуктивність якого $L = \mu\mu_0 n^2 V$. Тоді

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n^2 I^2 V.$$

Магнітна індукція поля в середині довгого соленоїда $B = \mu\mu_0 In$. Звідси

$$In = \frac{B}{\mu\mu_0}.$$

Тоді

$$W_M = \frac{1}{2} \mu\mu_0 \frac{B^2}{(\mu\mu_0)^2} V = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu\mu_0} V.$$

Оскільки $B = \mu\mu_0 H$, то

$$W_M = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2 V = \frac{1}{2} B H V.$$

Магнітне поле соленоїда однорідне і зосереджене всередині соленоїда, а енергія поля розподілена в ньому з об'ємною густиною w_M , яка дорівнює

$$w_M = \frac{W_M}{V} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

У випадку неоднорідного магнітного поля його енергію в деякому об'ємі V можна визначити так. Поділимо об'єм V на нескінченно малі елементи dV так, щоб поле в кожному з них можна було вважати однорідним. Тоді енергія елемента об'єму з локальною густиною w_M

в ньому дорівнює: $dW_{\mathcal{M}} = w_{\mathcal{M}} dV$.

Інтегруючи цей вираз по всьому об'єму поля V , отримаємо формулу для обчислення енергії неоднорідного поля:

$$W_{\mathcal{M}} = \int_V w_{\mathcal{M}} dV = \int_V \frac{BH}{2} dV.$$

Лекція № 14

Тема: Вихрове електричне поле. Струм зміщення. Узагальнений закон повного струму. Рівняння Максвелла для електромагнітного поля. Значення теорії Максвелла.

Мета: Розкрити фізичний зміст рівнянь Максвелла; показати роль його теорії для подальшого розвитку фізики.

Обладнання: дидактичний матеріал

Хід заняття:

I. Організаційний момент.

- а) готовність групи до заняття;
- б) психоемоційний настрій;
- в) перевірка присутніх.

II. Актуалізація опорних знань студентів.

Дати відповіді на питання:

1. Як може створюватись магнітне поле?
2. Чим створюється електричне поле?

III. Виклад нового матеріалу.

План

1. Вихрове електричне поле.
2. Струм зміщення.
3. Перше та друге рівняння Максвелла в інтегральному та диференціальному виглядах.
4. Третє та четверте рівняння Максвелла в інтегральному та диференціальному виглядах.
5. Матеріальні рівняння Максвелла.
6. Значення теорії Максвелла.

IV. Узагальнення та систематизація знань.

Розв'язати задачу № 3.382 із збірника задач за ред. І.П.Гаркуші

V. Підведення підсумків заняття.

VI. Домашнє завдання: вивчити матеріал лекції; за підручником «Загальний курс фізики», т.2, за ред. Кучерука І.М. опрацювати матеріал на с.404 -412

Самостійне вивчення: вивчити матеріал теми: 2.2.1 Електричний коливальний контур. Вільні електромагнітні коливання. Диференціальне рівняння вільних затухаючих електромагнітних коливань і його розв'язок. Автоколивання. Генератор незгасаючих електромагнітних коливань. Вимушені електромагнітні коливання. Диференціальне рівняння вимушених електромагнітних коливань і його розв'язок. Амплітуда електромагнітних коливань. Закон Ома. Індуктивний і ємнісний опори. Резонанс. Застосування резонансу.

за підручником «Загальний курс фізики» т.2 за ред. Кучерука І.М. опрацювати матеріал на с. 386 -397; або за підручником «Фізика» за ред. Дмитрієвої В.Ф. - с.405 - 414.

Зміст лекції додається

Лекція № 14

Тема: Вихрове електричне поле. Струм зміщення. Узагальнений закон повного струму. Рівняння Максвелла для електромагнітного поля. Значення теорії Максвелла.

Вихрове електричне поле. Струм зміщення.

Електричне поле пов'язують із певною системою нерухомих зарядів. Але ж відомо, що нерухомість об'єктів відносно однієї системи відліку не виключає їхній рух відносно іншої інерціальної системи. Стосовно електричних зарядів це буде означати, що такі заряди будуть породжувати і електричне і магнітне поле. Це ж буде стосуватись і провідників зі струмом. Наприклад: навколо нерухомого провідника з постійним струмом існує магнітне поле. Якщо ж відносно інших інерціальних систем цей же провідник буде рухатись, то породжуване ним магнітне поле буде викликати в ньому ж вихровий струм, а останній, як відомо, супроводжується вихровим електричним полем. Отже, поле, яке відносно окремих систем відліку можна назвати „чисто” електричним, відносно інших систем – буде представляти собою сукупність і магнітного і електричного полів.

Як відомо, конденсатор у колі постійного струму становить розрив, у просторі між пластинами конденсатора існує електричне поле. Але ж у випадку розряду конденсатора, напруженість електричного поля не залишається величиною сталою. Це явище найдосконаліше вивчив Дж. Максвелл у серії праць 1860–1865 р.р.

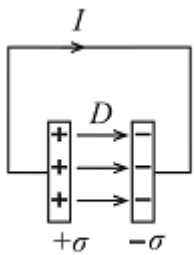


Рис. 13.1

Нехай пластини конденсатора несуть густину заряду σ (рис.13.1), простір між конденсатором заповнений діелектриком. Розряд конденсатора проходить через зовнішній провідник, при цьому струм провідності направлений від лівої обкладки до правої, а його густину можна знайти

$$j = \frac{d\sigma}{dt}$$

як: $j = \frac{d\sigma}{dt}$. Електричне поле між пластинами конденсатора можна

характеризувати або вектором напруженості $\vec{E}$, або вектором індукції

електричного поля $\vec{D}$. Розряд конденсатора призведе до зміни густини заряду, а значить

до відповідної зміни $\vec{D}$, що можна подати так: $\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dD}{dt} = j_{zm}$. Величину зміни вектора електричної індукції Максвелл назвав *струмом зміщення*.

Оскільки, при розряді конденсатора поле між обкладинками конденсатора зменшується, то остання похідна – від’ємна, а значить і струм зміщення напрямлений протилежно до $\vec{D}$. Таким чином, при розрядці конденсатора, Максвелл розрізняє струм провідності та струм зміщення, а повний струм при цьому дорівнює сумі обох струмів:

$$I = I_{np} + I_{zm} = \int_S (j_{np} + j_{zm}) dS = \int_S (j_{np} + \frac{dD}{dt}) dS$$

Навколо провідників із змінним струмом електричне поле досить слабке, тому і струми зміщення дуже малі, тобто струм можна вважати лише струмом провідності. В діелектрику ж струму провідності майже немає, тому увесь струм є струмом зміщення.

Для діелектриків характерне явище поляризації. Максвелл припустив, що діелектрики можна характеризувати відповідно струмом поляризації, який нагріває діелектрик. Для діелектриків відомий зв’язок $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{p}$. Тому звідси слідує, що струм зміщення повинен мати дві складові: струм поляризації, який визначається

величиною $\frac{d\vec{p}}{dt}$ та власне струму зміщення, не пов’язаного із зарядами, який

визначається величиною $\epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$.

Отже, на відміну від струму провідності, який носить простий та зрозумілий зміст, струм зміщення не пов’язаний із переміщенням якихось частинок. В подальшому розвитку поняття про струм зміщення Максвелл висунув сміливу гіпотезу, що навколо струму зміщення повинно існувати таке ж магнітне поле, як і навколо струму провідності. Сміливість цієї гіпотези стає особливо очевидною, оскільки вона не опиралась на дослідні

дані, а навпаки — вимагала експериментальної перевірки.

Рівняння Максвелла



Джеймс Клерк Максвелл

Через 2 століття після відкриття Ньютоном рівнянь руху матеріальних тіл геніальний англійський фізик Джеймс Клерк Максвелл отримав рівняння, які описують динаміку нової форми матерії – електромагнітного поля. Таким чином були повністю встановлені теоретичні основи класичної фізики.

Отже Максвелл створив теорію електромагнітного поля, яка дозволила з єдиної точки зору пояснити електричні та магнітні явища. В її основі лежать чотири рівняння (рівняння Максвелла в інтегральній формі).

1. Перше рівняння Максвелла

Максвелл узагальнив теорему Гауса для електростатичного поля. Він стверджував, що вона є справедливою для довільного електричного поля: як стаціонарного, так і для змінного.

$$\oint_S D_n dS = \sum q_i$$

Фізичний зміст:

Електричний заряд – джерело потенціального електричного поля.

2. Друге рівняння Максвелла

Максвелл стверджував, що теорема Гауса є справедливою і для довільного магнітного поля.

$$\oint_{\mathbf{S}} \mathbf{B}_n d\mathbf{S} = 0$$

Фізичний зміст:

1. Магнітних зарядів в природі не існує.
2. Не існує потенціального магнітного поля.

3. Третє рівняння Максвелла

Дане рівняння є узагальненням закону електромагнітної індукції Фарадея.

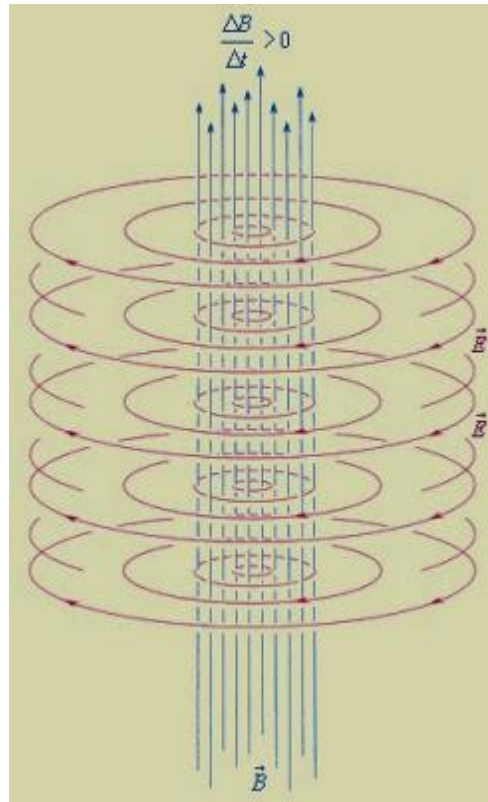
$$\oint_l \mathbf{E}_t d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}_n}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{d\Phi_m}{dt};$$

Фізичний зміст:

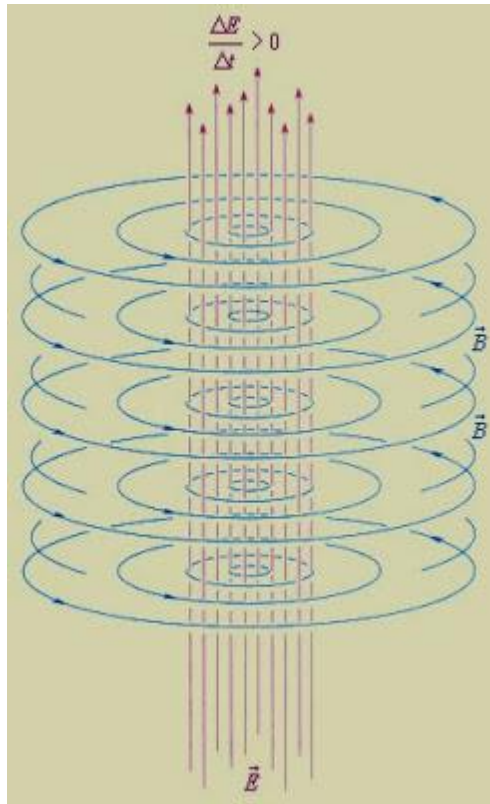
Змінне магнітне поле породжує змінне вихрове електричне.

Це рівняння показує, що джерелами електричного поля можуть бути не тільки електричні заряди, але і змінні магнітні поля: в кожній точці простору, внаслідок зміни з часом індукції магнітного поля, утворюється вихрове електричне поле, напруженість якого $\mathbf{E}$ лежить в площині, перпендикулярній $\mathbf{B}$.

4. Четверте рівняння Максвелла



Мал 1.
Закон електромагнітної індукції в трактуванні Максвелла.



Мал. 2. Гіпотеза Максвелла: змінне електричне поле породжує магнітне поле

Це рівняння показує, що магнітні поля можуть створюватись як електричним струмом, так і змінним електричним полем. Змінний струм, на відміну від постійного, проходить через конденсатор; але цей струм не є за своєю сутністю струмом провідності; він називається струмом зміщення.

Струм зміщення представляє собою змінне електричне поле; його густина

$$J_{зм} = \epsilon \epsilon_0 \cdot dE/dt.$$

$$\oint_l H_l dl = \int_S (j_{пров} + \frac{\partial D}{\partial t})_n dS;$$

Фізичний зміст:

Змінне магнітне поле породжується струмами провідності та змінним електричним полем.

Величини, що входять в рівняння Максвелла зв'язані між собою співвідношеннями

$$\begin{aligned}\vec{j} &= \sigma \vec{E} \\ \vec{D} &= \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H}\end{aligned}$$

Де ϵ_0, μ_0 – відповідно електрична та магнітна сталі; ϵ, μ – діелектрична та магнітна проникності; σ – питома електропровідність.

ВИСНОВКИ

1. Взаємодія між зарядами здійснюється через електромагнітне поле; поділ на електричне та магнітне поле є доволі умовний, оскільки величини E та B залежать від вибору інерціальної системи відліку (ІСВ).
2. Електромагнітне поле може існувати самостійно – без електричних зарядів та струмів.
3. Будь-яка зміна електромагнітного поля з часом супроводжується його зміною в просторі – тобто поширюється у просторі у вигляді електромагнітних хвиль.
4. Електромагнітні хвилі поширюються у вакуумі зі швидкістю $c = 300\,000$ км/с. Швидкість розповсюдження електромагнітної хвилі залежить від властивостей середовища

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

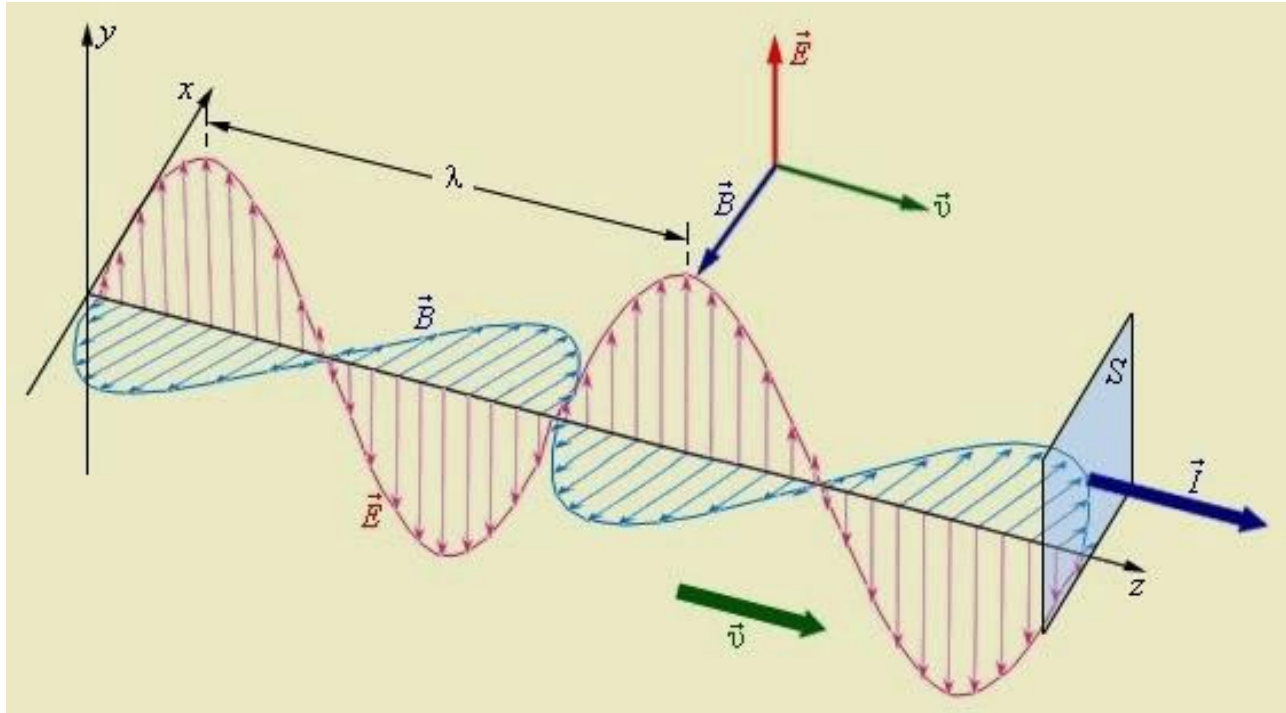
$$c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

5. Електромагнітні хвилі поглинаються провідниками.

6. Електромагнітні хвилі – поперечні (мал. 3).

Сукупність змінних електричного та магнітного полів, що нерозривно зв'язані одне з одним, називається електромагнітним полем.

7. Вектори E та B електромагнітної хвилі коливаються в однаковій фазі: $E = vB$, тобто коливання векторів E та B відбуваються синфазно в часі і просторі, тобто E та B одночасно досягають максимуму і одночасно перетворюються на нуль.



Мал 3.

Електромагнітні хвилі поперечні – вектори E та B перпендикулярні один до другого і лежать в площині, перпендикулярній до напрямку поширення хвилі .

8. Миттєві значення E та H зв'язані співвідношенням

$$\sqrt{\epsilon\epsilon_0}E = \sqrt{\mu\mu_0}H$$

9. Електромагнітні хвилі переносять енергію. Об'ємна густина енергії електромагнітної хвилі дорівнює сумі об'ємних густин енергії електричного (w_{el}) і магнітного (w_m) полів:

$$w_{el-m} = w_{el} + w_m = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$$

Важливо

Можна показати, що 3 та 4 рівняння Максвелла можна перетворити таким чином:

$$\begin{cases} \oint_l E_l dl = - \int_{(S)} \frac{\partial B_n}{\partial t} dS \\ \oint_l H_l dl = \int_{(S)} \frac{\partial D_n}{\partial t} dS \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} = \epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \end{cases},$$

тобто вектори напруженостей E та H змінного електромагнітного поля задовольняють хвильовому рівнянню

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Будь-яка функція, що задовольняє хвильовому рівнянню, описує деяку хвилю. Отже, з рівнянь Максвелла випливає, що електромагнітне поле існує у вигляді електромагнітних хвиль.

Система рівнянь Максвелла.

Шотландський фізик Джеймс Максвелл зумів в рамках єдиної теорії об'єднати опис усіх явищ електрики і магнетизму, створивши вчення про електромагнітне поле. Максвелл показав, що всі електричні і магнітні явища можуть бути описані всього чотирма рівняннями – такими ж фундаментальними, як закони Ньютона для механіки, причому ці рівняння справедливі, на відміну від законів Ньютона, в неінерціальних системах відліку.

Розглянемо рівняння Дж. Максвелла в інтегральному вигляді.

1. *Теорема Остроградського–Гаусса*: потік вектора електричного зміщення через довільну замкнену поверхню, що обмежує електричні заряди дорівнює алгебраїчній сумі останніх:

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i = \int_V \rho dV,$$

де ρ – об’ємна густина заряду; dV – елемент об’єму всередині поверхні.

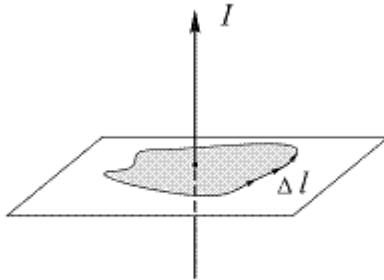


Рис. 13.4

Це фактично відома теорема Гауса стосовно потоку ліній індукції електричного поля і стверджує, що лінії індукції $\vec{D}$ можуть починатись та закінчуватись лише на заряджених частинках чи тілах, тобто що електростатичне поле обов’язково пов’язане із зарядженими тілами.

2. *Узагальнений закон повного струму (закон Максвелла–Ампера)*. Розглянемо довільний контур, який охоплює провідник зі струмом та розіб’ємо його на елементарні ділянки Δl (рис.13.4). Як відомо, Ампер встановив, що сума добутків довжин елементарних ділянок на складову вектора $\vec{B}$ пропорційна результуючій силі струму, тобто $\sum \vec{B} \Delta \vec{l} = \mu_0 I$, а оскільки $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$, то можна записати, що $\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I_k$.

Максвелл узагальнив даний закон та подав його у вигляді:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int (\vec{j}_{np} + \frac{d\vec{D}}{dt}) d\vec{S},$$

тобто, циркуляція вектора напруженості магнітного поля по довільному контуру дорівнює повному струмові, що пронизує будь-яку поверхню, пов’язану із даним контуром.

Це рівняння стверджує, що навколо будь-якого струму провідності та змінного електричного поля неодмінно існує вихрове магнітне поле, причому $\vec{H} \perp \vec{E}$.

3. *Закон електромагнітної індукції Фарадея*: змінне в часі магнітне поле породжує навколо себе вихрове електричне поле:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Це рівняння є узагальненням явища електромагнітної індукції та стверджує, що змінне в часі магнітне поле утворює вихрове електричне поле. Лінії напруженості

електричного поля $\vec{E}$ охоплюють лінії індукції магнітного поля $\vec{B}$ у вигляді замкнутих кривих.

4. Магнітний потік через довільну замкнуту поверхню завжди дорівнює нулю

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0,$$

тобто поле вектора $\vec{B}$ являється чисто вихровим.

Це рівняння виражає теорему Гауса відносно потоку ліній магнітної індукції через довільну замкнуту поверхню і стверджує, що ці лінії завжди замкнуті.

Рівняння Максвелла виражають основні закони електромагнетизму. Головний висновок можна сформулювати так. Електричне та магнітне поле можна розглядати окремо, якщо вони незмінні в часі. Якщо ж вони змінні в часі, то розглядати їх окремо не можна, оскільки змінне в часі магнітне поле породжує змінне в просторі електричне, а змінне в часі електричне – призводить до виникнення змінного в просторі магнітного поля. Отже, головним висновком є умова виникнення електромагнітних хвиль. Цей висновок для вакууму в загальному можна математично описати системою рівнянь:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= -\frac{\partial \vec{H}}{\partial x} \\ -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}.\end{aligned}$$

Значення теорії Максвелла

1. Теорія Максвелла виводить на фізику фундаментальніше поняття єдиного електромагнітного поля. “Теорія, що її пропоную, – пише Максвелл, – можна назвати теорією електромагнітного поля, вона оперує простором, оточуючим електричні і магнітні тіла; може бути також названа динамічною теорією, оскільки він допускає, у цьому просторі є матерія, яка перебуває у русі, з якої та зберігання здійснюються спостережувані електромагнітні явища”. І далі: “Електромагнітне полі – це те частина простору, що містить і оточує тіла, перебувають у наелектризованом чи намагніченном стані”. Щоправда, тут із сучасної погляду є неточність: полі – це частина простору, а матеріальний об'єкт, що у просторі і часу. Є ще одне невідповідність ідей Максвелла сучасним поглядам: полі бою біля Максвелла – не самостійний об'єкт, а процес, яке у ефірі, прояв ефіру. Лише подальшому у зв'язку з створенням теорії відносності, коли всі можливим усунення гіпотези ефіру, полі було визнано самостійно існуючим виглядом матерії, не потребують особливому матеріальному носії. Запровадження поняття поля як основного об'єкта, забезпечує все електромагнітні взаємодії, акцент не так на заряди і струми, але в “породжене” ними полі означають остаточне затвердження у фізиці ідеї близькодійствія.

2. Принципово нової рисою теорії Максвелла, котра виражає послідовне проведення ідеї близькодействія, і те, що теорія Максвелла виходить із визнання кінцівки швидкості поширення електромагнітних взаємодій. З цього випливає те, що сигнал, випущений джерелом, але з що ще приймачем, живе самостійним життям як реальне освіту, що має енергією, котра, за Максвеллу, зосереджена полі. Енергія електромагнітного взаємодії у Максвелла залежить від параметрів поля (E і B). Це є енергія поля, а чи не енергія зарядів і струмів. Але енергія може бути без матеріального носія. Отже, полі є об'єктивною реальністю.

3. Теорія Максвелла по-новому порушила питання про взаємозв'язку електрики і магнетизму. Їх єдність в тому, що змінюється електричне полі породжує магнітне, а змінюється магнітне породжує електричне, тобто. електричне і магнітне поля не є певні самостійні сутності, а є окремі прояви єдиного електромагнітного поля, зумовлені обраною системою відліку.

4. Теорія Максвелла з урахуванням поняття поля звела на єдину систему все знання з електрики і магнетизму. Вона дав можливість, знаючи компоненти поля (E і B) у цій точці в момент часу, відшукати їхні значення будь-який інший точці будь-якій іншій час, а знаючи характеристики поля, знайти й сили, які діють заряди і струми. Усі закони електричних і магнітних взаємодій, всі закони струму, виведені раніше, виходять з рівнянь Максвелла як слідства. Але значення теорії у узагальненні який був відомий, з її впливає надзвичайно багато нового (крім раніше сказаного).

5. З рішення рівнянь випливає, що електромагнітне полі поширюється у просторі як хвиль і швидкість електромагнітних хвиль дорівнює швидкості світла. Тим самим було встановлюється як існування об'єкта, а й пропонують ідею про електромагнітної природу світла, отже, встановлюються єдність оптики і електромагнетизму.

Матеріал для самостійного вивчення з теми:

2.2.1. Електричний коливальний контур. Вільні електромагнітні коливання.

Диференціальне рівняння вільних затухаючих електромагнітних коливань і його

розв'язок. Автоколивання. Генератор незгасаючих електромагнітних коливань.

Вимушені електромагнітні коливання. Диференціальне рівняння вимушених

електромагнітних коливань і його розв'язок. Амплітуда електромагнітних коливань.

Закон Ома. Індуктивний і ємнісний опори. Резонанс. Застосування резонансу.

Систему, яка складається з конденсатора ємністю C і котушки індуктивності L , в якій можуть виникати електромагнітні коливання, називають коливальним контуром. Електромагнітними коливаннями називають періодичні взаємозв'язані зміни зарядів, струмів, напруг електричного і магнетного полів. Вільні електромагнетні коливання

контуру є гармонічними з періодом: $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Дану формулу вивів англійський фізик У.Томсон.

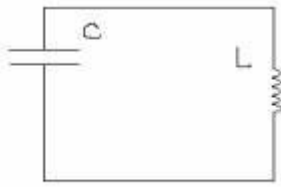


Рисунок 1

Циклічна частота вільних електромагнітних коливань у контурі:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Якщо заряд конденсатора з часом змінюється за гармонічним законом:

$$q = q_0 \cos \omega_0 t,$$

то й сама сила струму в коливальному контурі змінюється за гармонічним законом:

$$I = I_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{де } I_0 = \omega_0 q_0$$

Коливання сили струму зміщені за фазою на $\pi/2$ відносно коливань заряду.

Під час вільних коливань у контурі відбувається взаємне перетворення енергії електричного поля в енергію магнетного поля. Якщо не існує втрат, то повна енергія:

$$W = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \text{const}$$

Розглянемо вільні згасаючі коливання, амплітуда яких внаслідок втрат енергії реальною коливальною системою зменшується з часом. Найпростішим механізмом зменшення енергії коливань є її перетворення в теплоту внаслідок тертя в механічних коливальних системах, а також омичних втрат і випромінювання електромагнітної енергії в електричних коливальних системах.

Закон згасання коливань визначається властивостями коливальних систем. Як правило розглядають лінійні системи – ідеалізовані реальні системи, у яких параметри, які визначають фізичні властивості системи, у ході процесу не змінюються. Лінійними системами є, наприклад, пружинний маятник при малих деформаціях пружини (в межах дії закону Гука), коливальний контур, індуктивність, ємність і опір якого не залежать ні від струму в контурі, ні від напруги. Різні за своєю природою лінійні системи описуються ідентичними лінійними диференціальними рівняннями, які дозволяють підходити до вивчення коливань різної фізичної природи з єдиної точки зору.

Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань лінійної системи задається у вигляді

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (29)$$

де x – коливна величина, яка описує той або інший фізичний процес;

β – коефіцієнт згасання;

ω_0 – циклічна частота вільних незгасаючих коливань цієї ж коливальної системи, тобто при $\beta=0$ (при відсутності втрат енергії).

Щоб знайти розв’язок рівняння (29), слід фізичну величину хвиразити через нову змінну z відповідно до рівняння

$$x = ze^{-\beta t}, \quad (30)$$

де $z = z(t)$.

Після підстановки першої і другої похідних від рівності (30) в рівняння (29) одержимо

$$\ddot{z} + (\omega_0^2 - \beta^2)z = 0. \quad (31)$$

Розв’язок рівняння (31) залежить від знака коефіцієнта $(\omega_0^2 - \beta^2)$ перед шуканою величиною. Розглянемо випадок, коли цей коефіцієнт додатний, тобто $(\omega_0^2 - \beta^2) > 0$.

Тоді одержимо рівняння типу

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0, \quad (32)$$

де

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2. \quad (33)$$

Розв'язком рівняння (32) є рівняння типу (9) першої теми:

$$z = A_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (34)$$

Після підстановки (34) у (30) для випадку малих загасань ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) одержуємо розв'язок рівняння (29) у такому вигляді:

$$x = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (35)$$

де $A = A_0 e^{-\beta t}$ — амплітуда згасаючих коливань;

A_0 — початкова амплітуда.

Залежність (35) показана на рис. 11 суцільною лінією, а амплітуда коливань — пунктирними лініями.

Проміжок часу $\tau = \frac{1}{\beta}$, протягом якого амплітуда згасання коливань зменшується у e разів, називається *часом релаксації*.

Згасання порушує періодичність коливань, тому згасаючі коливання не є періодичними, і до них поняття періоду або частоти незастосовне.

Однак якщо згасання малі, то можна умовно користуватися поняттям періоду як проміжку часу між двома послідовними максимумами (або мінімумами) коливань тієї чи іншої фізичної величини (рис. 11).

Період згасаючих коливань з урахуванням формули (33) дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (36)$$

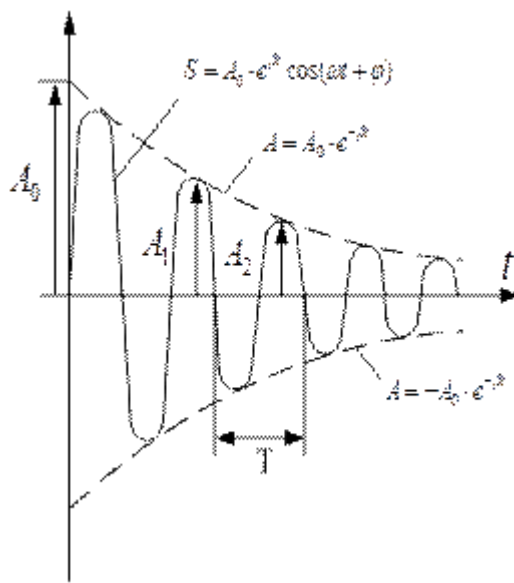


Рис. 11

Якщо $A(t)$ і $A(t + T)$ – амплітуди двох послідовних коливань, які відповідають моментам часу, що відрізняються на один період, то їх відношення

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T},$$

називається декрементом згасання, а його логарифм

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N} \quad (37)$$

називається *логарифмічним декрементом згасання*, а величина N визначає число коливань, які виконує коливальна система за час зменшення амплітуди в e разів.

Для характеристики втрат енергії коливальною системою з часом, користуються поняттям *добротності* Q , яка при малих значеннях логарифмічного декременту є помноженим на 2π відношенням повної накопленої системою енергії до середніх втрат енергії цією системою за час в один період, тобто

$$\theta = 2\pi \frac{W}{\Delta W(T)}, \quad (38)$$

де W — повна енергія системи;

$\Delta W(T)$ — середні втрати енергії системою за час в один період ($t=T$).

Повна енергія коливальної системи в момент часу t дорівнює

$$W(t) = \frac{m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t}}{2}. \quad (39)$$

Енергія коливальної системи через час в один період дорівнює

$$W(t+T) = \frac{m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta(t+T)}}{2}. \quad (40)$$

Втрати енергії системою за час в один період легко знайти відніманням від співвідношення (39) співвідношення (40), тобто

$$\Delta W(T) = W(t) - W(t+T) = \frac{m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t}}{2} - \frac{m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta(t+T)}}{2}. \quad (41)$$

Добротність коливальної системи одержимо, якщо поділити (39) на (41) і помножити одержану величину на 2π

$$\theta = 2\pi \frac{\frac{m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t}}{2}}{\frac{m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta t}}{2} - \frac{m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\beta(t+T)}}{2}} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\delta}, \quad (42)$$

де δ — логарифмічний декремент згасання.

У виразі (42) враховано, що відношення

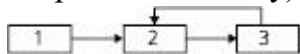
$$\frac{e^{-2\delta}}{e^{-2\delta} - e^{-2\delta(t+T)}} = \frac{1}{1 - e^{-2\delta T}} = \frac{1}{1 - 1 + 2\beta T} = \frac{1}{2\beta T}.$$

У випадку, коли $\beta^2 \ll \omega_0^2$, то в формулі (42) період коливань T приймають рівним T_0 .

Автоколивання. Генератор незгасаючих коливань на транзисторі

Автоколивання — процес, який принципово відрізняється як від вільних (без зовнішньої дії) коливань, якби вони могли не згасати, так і від вимушених коливань, які відбуваються під дією періодично змінної сили. Автоколивання здійснюються, на відміну від вільних, під дією зовнішньої сили. Але вона, на відміну від вимушених коливань, не змінюється періодично (така зміна відбувається поступово, плавно, завдяки самій коливальній системі.)

Принцип діє автоколивальної системи такий. Деякий пристрій 1, що є носієм запасу зовнішньої енергії (резервуар енергії) з'єднується з коливальною системою 3 за допомогою клапана 2. Лінія зв'язку резервуар—клапан—система одержала назву прямої, на відміну від ще однієї лінії зв'язку система—клапан, що називається зворотною лінією (або лінією зворотного зв'язку).



Завдяки існуванню зворотного зв'язку система сама керує своїм енергопостачанням, періодично то підключаючись до резервуару шляхом «відкривання» клапана, то відключаючись. Це «підживлення» системи енергією відбувається в такт із вільними коливаннями системи.

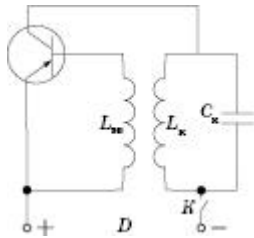
Одна з перших автоколивальних систем — маятниковий годинник, винайдений у середині XVII ст. голландським фізиком Х. Гюйгенсом.

Джерелом енергії в цій системі служить гиря, опускання якої під дією сили тяжіння призводить до обертання ходового зубчатого колеса. Роль клапана відіграє анкер (рівноплечий важіль, жорстко пов'язаний із маятником). Важливу роль у механічній конструкції годинника відіграють палетки — дугоподібні пластинки з рубіну чи іншого твердого матеріалу. Через палетки маятник і одержує підкачку енергії від гирі.



Існують різні схеми автогенераторів синусоїдних електричних коливань, але принцип їх роботи однаковий. У перших подібних генераторах використовувались вакуумні тріоди. У сучасних генераторах роль клапана відіграє транзистор.

Коливальний контур підключають до джерела постійного струму D послідовно з транзистором, емітерний перехід якого через котушку зворотного зв'язку $L_{\text{н}}$ індуктивно зв'язаний із контуром:



У разі замикання електричної схеми ключем K конденсатор контуру C_k заряджається, внаслідок чого в контурі виникають коливання. Контурний струм створює магнітне поле в котушці L_k , яке індукуює на кінцях котушки L_n змінну напругу. Під її дією електричне поле емітерного переходу періодично підсилюється і послаблюється, транзистор то відкривається, то закривається. Коли транзистор відкритий, через нього відбувається підзарядка конденсатора від джерела D у контурі, що робить коливання незгасаючими.

Якщо в коливальному контурі з ємністю C , індуктивністю L , опором R є періодично діюча змущувальна електрорушійна сила

$$E = E_0 \cos \omega t,$$

то в такому контурі існуватимуть вимушені електромагнітні коливання.

За II правилом Кірхгофа маємо

$$IR + U = -L \frac{dI}{dt} + E_0 \cos \omega t. \quad (5.77)$$

Виразивши відповідні величини через заряд, отримаємо

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_0 \cos \omega t$$

або

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E_0 \cos \omega t, \quad (5.78)$$

чи

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{E_0}{L} \cos \omega t. \quad (5.79)$$

Співвідношення (5.78) або (5.79) є диференціальними рівняннями вимушених електромагнітних коливань.

Ввівши позначення

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \quad 2\beta = \frac{R}{L}; \quad h = \frac{E_0}{L},$$

рівняння (5.79) перепишемо у вигляді

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = h \cos \omega t. \quad (5.80)$$

Розв'язок цього рівняння для віддалених моментів часу запишемо у вигляді

$$q = q_0 \cos(\omega t + \alpha). \quad (5.81)$$

Отже, вимушені електромагнітні коливання – незгасаючі і здійснюються з частотою ω і амплітудою, яка залежить від параметрів контура і цієї частоти:

$$q_0 = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{E_0}{L \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{R^2 \omega^2}{L^2}}}.$$

Початкова фаза α рівна

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = -\frac{\frac{R\omega}{L}}{\frac{1}{LC} - \omega^2} = \frac{R}{\omega L - \frac{1}{\omega C}}.$$

Зрозуміло, що в такому контурі буде мати місце резонанс як заряду, так і напруги і струму, коли вимушуюча частота наближається до власної ω_0 .

З (5.81) можна отримати значення сили струму в контурі

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega q_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

або

$$I = -I_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

де

$$I_0 = \omega Q_0 = \frac{\omega E_0}{L \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2 R^2}{L^2}}} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}. \quad (5.82)$$

Ця формула має зміст закону Ома для кола змінного струму (при послідовному з'єднанні елементів), де повний опір кола

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}$$

є векторною сумою активного опору R , індуктивного опору ωL та ємнісного опору $\frac{1}{\omega C}$. Зрозуміло, що резонанс буде мати місце при рівності індуктивного та ємнісного опорів.

Розглянемо залежність амплітуди A вимушених механічних або електромагнетних коливань від частоти ω . Механічні й електромагнетні коливання будемо розглядати одночасно, називаючи коливну величину або зміщенням (x) коливного тіла від положення рівноваги, або зарядом (Q) конденсатора.

З формули (3.6) випливає, що амплітуда A зміщення має максимум. Щоб визначити

резонансну частоту $\omega_{\text{рез}}$ — частоту, при якій амплітуда A зміщення досягає максимуму, — потрібно дослідити на максимум функцію $A = f(\omega)$. Диференціюємо підкореневий вираз цієї функції по ω і прирівнюємо його до нуля:

$$\frac{d}{d\omega} \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right] = 0,$$

$$-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\beta^2 \omega = 0$$

Ця рівність виконується при двох умовах $\omega = 0$, і $\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, фізичний зміст яких має лише позитивне значення. Отже, резонансна частота буде дорівнювати

$$\omega_{\text{рез}} = \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (15)$$

Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні частоти вимушеної сили до $\omega_{рез}$, називається резонансом (відповідно механічним або електричним). У випадку коли $\beta^2 \ll \omega_0^2$, значення $\omega_{рез}$ практично збігається з власною частотою ω_0 коливної системи. Підставляючи (15) у формулу (6), одержимо

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (16)$$

На рис. 3 наведені залежності амплітуди вимушених коливань від частоти при різних значеннях β . З виразів (15) і (16) випливає, що чим менше β , тим вище і правіше лежить максимум даної кривої. Якщо $\omega_0 \rightarrow 0$, то всі криві (див. рис.3) сходяться в одній точці, яка

відповідає, відмінному від нуля граничному значенню амплітуди $A_0 = \frac{F_0}{m \omega_0^2}$, так званому статичному відхиленню.

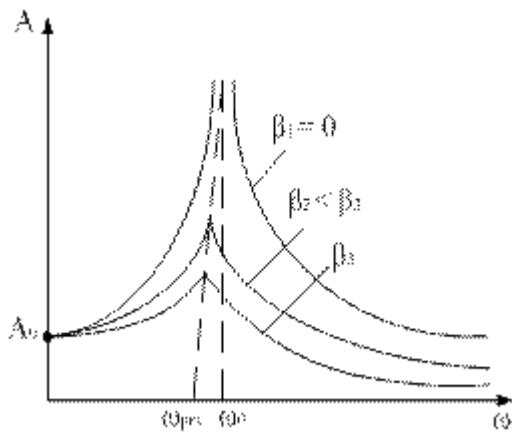


Рис.3

У випадку електромагнетних коливань $A_0 = \frac{U_m}{L \omega_0^2}$. Якщо $\omega \rightarrow \infty$, то всі криві мають асимптотичне наближення до нуля. Показані на рис. 3 криві називається резонансними кривими.

З формули (16) випливає, що при малому затуханні ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) резонансна амплітуда зміщення буде мати вигляд

$$A_{res} = \frac{F_0}{2m\beta\omega_0}. \quad (17)$$

Поділимо значення резонансної амплітуди (17) на статичне значення

амплітуди $A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$, одержимо добротність коливальної системи

$$\theta = \frac{A_{res}}{A_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\delta}, \quad (18)$$

де δ — логарифмічний декремент затухання. Як видно з (18), добротність коливальної системи характеризує її резонансні властивості. Чим більше число добротності, тим більша резонансна амплітуда.

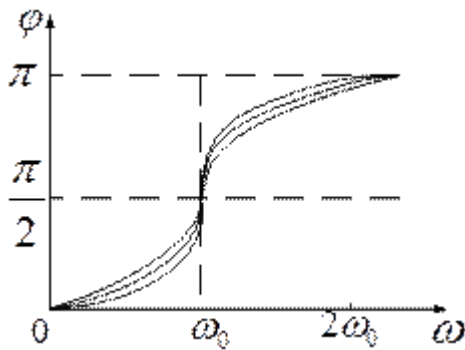


Рис. 4

Залежність φ від ω при різних коефіцієнтах β графічно показана на рис. 4, з якого випливає, що при зміні ω змінюється і зсув фаз φ . З формули (7) видно, що при $\omega = 0$, $\varphi = 0$, а при $\omega = \omega_0$ незалежно від значення коефіцієнта затухання β , $\varphi = \pi/2$, тобто сила випереджає по фазі коливання на $\pi/2$. При подальшому збільшенні ω зсув фаз зростає і при $\omega \gg \omega_0$, $\varphi \rightarrow \pi$, тобто фаза коливань майже протилежна до фази зовнішньої сили. Сімейство кривих, зображених на рис. 4, називається фазовими резонансними характеристиками.

Зупинимось коротко на явищі *параметричного резонансу*. Виявляється, що існують інші види зовнішніх взаємодій, з допомогою яких можна значно збільшити амплітуду коливань. Цей вид взаємодій полягає в тому, що в такт коливань періодично змінюють один із параметрів коливальної системи. Так наприклад збільшують довжину математичного маятника l , коли він перебуває в крайніх положеннях і дещо зменшують її, коли маятник проходить положення рівноваги, від цього маятник почне сильно розгойдуватись,

амплітуда коливань буде швидко зростати, тобто наступить явище параметричного резонансу.

Збільшення енергії маятника відбувається за рахунок виконання механічної роботи по зміні довжини маятника. Сила тяжіння маятника в цьому випадку є різною, — меншою в крайніх положеннях і більшою при проходженні маятником положення рівноваги. Від'ємна робота, яку виконують зовнішні сили по збільшенню довжини маятника є меншою за додатну роботу по зменшенню довжини маятника в положенні рівноваги. За час одного повного коливання (період коливань) сумарна робота по зміні довжини маятника є більшою за нуль.

Прикладом параметричного резонансу є коливання гойдалки. Без будь-яких зовнішніх впливів дитина, перебуваючи на гойдалці, сама здатна збільшувати амплітуду коливань. Потрібно лише в крайніх положеннях присідати, а в положенні рівноваги — підніматись. В цьому випадку коливальна система поповнюється енергією за рахунок мускульної сили ніг.

Явища резонансу можуть бути як шкідливими, так і корисними. Наприклад, при конструюванні машин і різного роду споруд необхідно, щоб їх власна частота коливань не збігалася з частотою можливих зовнішніх впливів, інакше можуть виникнути вібрації, які приведуть до значних руйнувань. З іншого боку, наявність резонансу дозволяє знайти навіть дуже слабкі коливання, якщо їх частота збігається з частотою власних коливань приладу. Так, телебачення, радіотехніка, прикладна акустика, що сприймають електричні коливання, засновані на використанні явища резонансу.

